4. 3. Wiskundig denken

4. 3. 1 Een voorlopige definitie

Dat wiskunde toegepaste logica is, is dermate duidelijk dat wij bij het betoog ervan niet stilstaan. Dat de wiskunde in haar huidige vorm - of liever vormenrijkdom - "een logisch samenhangend systeem van objectieve zinnen" is, is niet zo direct duidelijk.

1. De stormachtige ontwikkeling ervan maakt dat één enkel persoon het geheel ervan nauwelijks kan overzien.

2. Het probleem is de term 'objectief'. De meningen lopen uiteen o.g.v. de metafysica die er zich in toont. De nominalist zal ze gemakkelijk een constructie van de geest heten die a.h.w. "in de lucht hangt", tenzij er extra wiskundige toepassingen zijn. De abstractionist ziet ze als een eigen vorm van werkelijkheid op zich terwijl de ideatief er een verwezenlijking van ideeën in ziet. In alle geval waren de stichters van de logistiek in hoofdzaak Platoniekers.

Kwantiteit: - Ch. Lahr, *Logique*, Paris, 1933-27, 559 / 569 (*Les sciences mathématiques*) stelt: "De wiskunde is de wetenschap van de kwantiteit".

Lahr definieert 'kwantiteit' als zowel getalwiskundige als ruimtewiskundige kwantiteit. - Opm. :Heel even gelet op het enorme aantal wiskundige vergelijkingen die als grondvorm de differentiaal "groter dan / gelijk aan / kleiner dan" aannemen. Wat duidelijk kwantitatief te verstaan is. Voor de meetkunde of ruimtewiskunde is het kwantitatieve op zijn manier duidelijk.

Een nieuwe definitie. - P.J. Davis / R. Hersh, *l' Univers mathématique*, Paris, 1985, 6 zegt: een naïeve definitie, op haar plaats in het woordenboek en geschikt als eerste benadering, luidt: "De wiskunde is de wetenschap van de kwantiteit en de ruimte".

1. Stellers voegen daar aan toe: "… alsook van het symbolenstelsel dat kwantiteit en ruimte verbindt".

2. Zij stellen verder dat a. die definitie "op werkelijke historische gronden steunt" en dat zij er hun uitgangspunt van maken maar dan om b. de ontwikkelingen der wiskunde sedert de laatste eeuwen en de verschillende duidingen der wiskunde in de verruimende definitie af te beelden. - Blijft dat de rekenkunde (kwantitatief aspect) en meetkunde (ruimtelijk aspect) voor Davis en Hersh, om historische en praktische redenen uitgangspunt blijven.

Een inhoudelijke definitie van de wiskunde in haar huidige vormen is dan eerder als één of ander lemma, d.i. een voorlopige definitie te duiden.

4. 3. 2 Wiskundige en niet - wiskundige bewijskracht.

Bibl. St.: J. Chlebny, *les maths font leur preuves*, in Journal de Genève, Gazette de Lausanne 10/11.09.1994. - Op het 22ste internationaal congres voor wiskunde (Zürich) kreeg P.L. Lions (°1956) het Fields eremerk om zijn verdienstelijk werk op het gebied van toegepaste wiskunde.

Het onderscheid tussen wiskundige en niet - wiskundige bewijzen. - Ziehier hoe Lions dat zegt. - "Indien wiskundigen soms niet erg in trek zijn bij sommige wetenschappers, dan ligt dit aan het grondig belang dat wiskundigen hechten aan het bewijs.

1. *Wiskundig*. - "De wiskunde is de enige wetenschap die definitieve en onherroepelijke bewijzen levert, gesteund op een soort reduceren dat op een onbetwistbaar resultaat uitloopt." Aldus Chlebny.

2. *Niet wiskundig*. - "De andere vakwetenschappen toetsen een theorie aan één of andere ervaring. Deze behelst onvermijdelijk onnauwkeurigheden.

Applicatief model. - Volgens de natuurkunde wordt de val der lichamen beheerst door een zeer eenvoudige wet. Toch is de waarneming terzake op zich nog geen bewijs. Men moet immers rekening houden met b.v. de wrijvingen in de lucht, de tijd die de aangewende apparatuur nodig heeft om te reageren. De wet terzake is dus, ofschoon theoretisch vooropgesteld, niet op exacte wijze toetsbaar. - Tot daar Clebny's verslag.

Opm. - Of alle fysici het daarmee eens zijn, is de vraag. Wel is het een feit dat niet - wiskundig toetsen (van een wet, van een theorie b.v.) situatief is, d.i. zich binnen een context van omstandigheden voordoet met de gebeurlijke invloeden van anderen. Terwijl de wiskundige bewijzen zich afspelen buiten dergelijke situaties, - in de reine geest op papier gezet.

Opm. - Ch. Lahr, *Logique*, Paris, 1933-27, 566/569 (*la démonstratrice*) zegt dat de voornaamste redeneertypes in de wiskunde de volgende zijn.

1. Deductief. Axioma's en uit die axioma's afgeleide stellingen dienen als voldoende reden om verdere conclusies daaruit logisch streng te deduceren.

2. Reductief.- Men stelt (als lemma) een stelling als te bewijzen voorop, om daarna stap voor stap (algoritmisch) het bewijs te leveren (als analyse).

Opm.: Dit is juist in een empirische wiskunde maar binnen een axiomatisch - deductief systeem komt dit tweede, zogezegd reductief type neer op een deductief bewijs gesteund op de vooropgestelde en 'funderende' axioma's en daaruit gededuceerde stellingen. - Men denke aan de zgn. wiskundige inductie b.v..

4. 3. 3 Wiskundige inductie

Bibl. st.: W.St. Jevons, *Logica*, 168/171. Wij staan even stil bij wat steller zegt.

Meetkundige inductie. Euclides, Elementen, 1: 5, stelt: "De hoeken aan de basis van een gelijkbenige driehoek zijn aan elkander gelijk". Opm.: zij zijn elkanders metaforisch of gelijkenismodel. Bewijs. Men tekent juist één gelijkbenige driehoek. Men toont aan dat, indien de zijden gelijk zijn, dan de tegenoverliggende hoeken noodzakelijk gelijk zijn. Opm.: de tegenoverliggende hoeken zijn metonymische of samenhangsmodellen van de zijden want, al gelijken zij er niet op, zij hangen ermee samen (en verschaffen informatie omtrent hun zijden, (cfr. 6.9)). Euclides laat het bij deze ene steekproef. De éne driehoek is een paradigma zo dat in en doorheen dat unieke model alle mogelijke modellen samenvattend gevat worden. Dat dit mogelijk is, staat of valt met de absolute eis - ceteris paribus - dat het over gelijkbenige driehoeken gaat. M.a.w.: de summatieve inductie beperkt zich hier tot juist één steekproef met als voorwaarde gelijkbenigheid der driehoeken. Zodoende is een amplificatieve inductie logisch verantwoord.

Getalwiskundige inductie. Jevons geeft een paradigma. Gegeven: de twee eerste opeenvolgende oneven getallen, 1 en 3. Indien samengeteld, dan is hun som 1+3 = 4 = 2 x 2. Gegeven: drie dergelijke getallen, 1 + 3 + 5, wier som is 9 = 3 x 3. Analoog: 1 + 3 + 5+ 7 = 16 = 4 x 4. Men ziet al de 'regel'! Dit is een summatieve inductie (drie steekproeven), samenvatbaar in de stelling "Totnogtoe is de som van alle dergelijke (let op onze term 'dergelijke', wat gelijkenis is) getallen gelijk aan de tweede macht van het aantal getallen". Nu volgt de amplificatieve inductie dankzij algebraïsering (lettergetallen).

Gegeven: n aantal opeenvolgende oneven getallen, te beginnen met 1.

Hypothese: "De vastgestelde wet gaat op tot en met de n-de term".

Dat geeft: $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) = n^2$.

Dit wordt nu op de opvolger 2n+1 toegepast: $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) + (2n+l)$.

De som van dit laatste getal met alle voorgaande is identisch met $(n+l)^2$.

Algemeen besluit: "Indien de wet geldt voor n termen, dan geldt de wet ook voor n+ 1 termen". Men ziet de term "algemeen besluit" waarin 'algemeen' de kennis-uitbreidende inductie vertolkt.

Jevons' opmerking. Het enige verschil met de meetkundige inductie hierboven bestaat erin dat de gekozen gevallen de eerste zijn van de reeks der gehele getallen om reden van het overzichtelijke ervan. De kleinheid van het aantal gekozen toetsingen krijgt de nadruk. Als summatieve inductie volstaan zij op één voorwaarde, nl. dat zij logische zekerheid verschaffen.

Opm.: In de grond zijn de bewust gekozen paradigma's lukrake paradigma's wier overzichtelijkheid de voorkeur uitlokt. Maar meer is er niet: aangezien zij een algemene 'wet' vertegenwoordigen, zijn zij in de grond lukraak want wat voor de gekozen voorbeelden geldt, geldt voor om het even welke andere steekproef. u, 'inductie' in één van de voornaamste betekenissen betekent "steekproeven nemen". In de wiskundige gevallen hierboven spelen zij de rol van paradigmatische steekproeven waarin in en doorheen het singuliere het universele kan gevat worden.

4. 3. 4 Axiomatische definitie

Bibl.st.: A. Virieux-Reymond, *L'épistémologie*, PUF, 1966, 48/52 (*La méthode axiomatique*). G. Peano (1858/1932), een der stichters van de logistiek, definieert het begrip "positief gehele getal" als volgt.

GG. De logische termen 'klasse' (verzameling), "lid van een klasse" (exemplaar) en 'implicatie' (behelzing: indien, dan); de getalwiskundige termen 'getal', '0', "1, 2 ..." exemplaren van getal), "a, b ... " (lettergetallen) zijn "verondersteld gekend" (fenomeen of gegeven).

GV. Definitie die én inhoud én omvang (deze laatste deductief) van het begrip "positief gehele getal" vastlegt. De OPL gebeurt in de volgende zinnen.

- 1. De opvolger van een getal. Indien a een getal is, dan is ook a+ (versta: a+ 1), d.i. de opvolger van a, een getal.

- 2. Twee niet onderscheidbare getallen hebben ook twee niet onderscheidbare opvolgers. Indien a en b getallen zijn en a+ is hetzelfde als b+, dan is a gelijk aan b.

- 3. Wiskundige inductie. Indien s een klasse is waarvan 0 een lid is en ieder lid van s een opvolger heeft binnen de klasse s, dan is ieder getal een lid van s. Opm. Indien een eigenschap een kenmerk is van 0 als lid van de klasse s èn indien die eigenschap ook een kenmerk is van de opvolger van 0, dan is zij een kenmerk van alle getallen in die klasse.

Of anders gezegd: het kenmerk in kwestie is een gemeenschappelijke eigenschap van alle exemplaren van het bewuste begrip. - Men veralgemeent te beginnen van 0 en 0+ tot alle andere leden der klasse (begrip) S.

- 4. Het positieve gehele getal. Indien a een getal is, dan is a+ (de opvolger van a) niet 0.

Verkort. 1. 0 is een getal. 2. De opvolger van een getal is een getal. 3. Meerdere getallen kunnen niet dezelfde opvolger hebben. 4. 0 is van geen enkel getal de opvolger. 5. Wiskundige inductie (zie hierboven).

Systeem. Ofschoon de zinnen - axioma's - onderling onherleidbaar zijn (en dus onafhankelijk van elkander, zo niet is er overtolligheid (redundantie)), toch zijn zij slechts gezamenlijk geldig en moeten zij onderling consistent (contradictievrij) zijn. Pas dan vormen zij een logisch systeem. Deze axioma's zijn een definitie zo dat de inhoud, geheel de inhoud en enkel geheel de inhoud van het begrip "positief geheel getal" onderscheidbaar is van de rest van al wat is.

Omvang. Aangezien 0 een getal is, is de vorming van tientallen, honderdtallen enz. mogelijk binnen het systeem maar aangezien 0 van geen enkel getal de opvolger is, zijn negatieve getallen - binnen het systeem welteverstaan - ondenkbaar ('onbestaande'). De omvang verandert indien wij de zin "Indien a een getal is, dan is a+ niet 0" laten wegvallen en vervangen door "0 is de opvolger van -1 ", dan - zoals men dat zegt - verzwakt het systeem en worden negatieve getallen 'denkbaar' binnen dat omvangrijker systeem dat dan eigenlijk een ander systeem is. De omvang waarop de inhoud slaat, blijkt uit de totaliteit van alle mogelijke rekenkundige bewerkingen die de axioma's toelaten, en die er de oneindige rijkdom van uitmaken.

Men ziet dat het systeem dat de definitie uitmaakt, een begrip is waarvan de inhoud in de zinnen verwoord is en de omvang blijkt uit de bewerkingen (deducties) die vanuit de definitie mogelijk zijn. Samen mèt de definitie vormt het geheel van alle deducties een "axiomatisch - deductief systeem".

4. 3. 5 Aristotelische axiomatische - deductieve methode

Bibl. st.: E.W. Beth, *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano,* Antwerpen /Nijmegen, 1944, 63vv. Steller behandelt het begrip "axiomatisch - deductieve methode" bij Aristoteles in het kader van diens begrippen inzake toenmalige wiskunde. Hij heet dat "aristoteliaanse wetenschapstheorie" waartegen moet opgemerkt dat behalve deductieve wetenschap Aristoteles ook reductieve wetenschap kent.

Definitie van "deductieve wetenschap". Zij omvat als begripsdefinitie wat volgt. 'W is symboolverkorting voor een systeem van zinnen zo dat:

1. alle zinnen van W op een omschreven omvang (gebied) van 'werkelijke' gegevens (objecten) slaan;

2. alle zinnen van W 'waar' zijn;

3. indien sommige zinnen tot W behoren, een willekeurige logische gevolgtrekking uit die zinnen ook tot W behoort;

4. er een eindig aantal termen aan te wijzen is zo dat:

a. de betekenis van deze termen geen nadere verklaring behoeft;

b. de betekenis van alle andere termen die in W optreden, met behulp van deze termen alleen kan omschreven worden;

5. er in W een eindig aantal zinnen aanwijsbaar is zo dat:

a. de waarheid van deze zinnen evident is;

b. alle andere zinnen van W op logische wijze uit deze zinnen afleidbaar zijn. Beth's beoordeling komt hierop neer:

- Ad 1. Dat vertolkt het Platonisch - aristotelisch 'realisme'.

- Ad 3. Dat definieert de deductieve werkwijze.

- Ad 4b en 5b. Dat definieert, aldus Beth, gelijkenis en samenhang, wat Plato heet 'stoicheiosis' (elementenleer).

Kritiek. Deze komt hierop neer. Het 'realisme' is te verstaan in de strikt ontologische zin van "de overtuiging dat alwat niet niets is maar iets, 'werkelijk' is". Zo is de uitdrukking "ax + b = c" niet niets maar iets en dus ontologisch iets werkelijks. De stoicheiosis is breder te definiëren dan enkel de theorie omtrent de "eerste axioma' s" van een deductieve methode. Dit wordt in dit boek elders (cfr. 9.2) uiteengedaan als Plato's ordeningsleer op basis van gelijkenis en samenhang. Maar toegegeven: de toepassing hier is daarvan één geval: de zinnen van een axiomatisch deductieve uiteenzetting vormen een systeem van gelijkenis en samenhang.

- Ad 4a en 5a. Dit heet men "het evidentiepostulaat". Men kan inderdaad redetwisten over wat in Aristoteles' taal "geen nadere verklaring nodig hebben "en "evident zijn" betekenen. Hij zal daarin wel tijdgebonden zijn. Maar elders (cf. 1.2.4) hebben wij het over de misduiding door eristici (met name Electra) van Aristoteles' evidentiebegrip. Een recentere theorie omtrent axioma's preciseert wel nader wat men in dat kader onder "geen nadere toelichting nodig hebben" te verstaan heeft. De hele vraag is: "Aristoteles, indien wij hem duiden zoals zijn werken hem tonen, zou hij die recentere preciseringen afwijzen?". Dat hij b.v. omtrent de oorsprong (inductie, abstractie) van de axioma's geen uitspraken deed, betekent enkel dat hij, zoals ieder denker, niet alle vragen na hem heeft voorzien, laat staan beantwoord.

Slotsom. Zijn definitie van de axiomatisch - deductieve methode is, mits preciseringen, in wezen geldig.

4. 3. 6 Het axiomatisch deductief systeem ontologisch geduid.

Bibl. St.: St. Barker, *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs 5N.J.), 1964, 23f. (Terms.Axioms); - E.W.Beth, *De wijsbegeerte der wiskunde,* Antw./Nijmeg., 1944, 63 vv.. (De aristotelische wetenschapstheorie).- Deze werken samenvattend en indien nodig verbeterend komt de structuur van het systeem van oordelen dat op axioma's gebaseerd is en deze deductief uitwerkt, op het volgende neer.

1. Een axiomatisch - deductief systeem omvat:

a. een eindig aantal basisbegrippen ("primitieve termen") die onbewezen vooropgesteld worden maar niet zonder voldoende (al was het een voorlopige) reden gekozen worden (zoals wij zagen in de definitie van het positieve gehele getal van Peano);

b. een eindig aantal basisstellingen ("primitieve stellingen" of axioma's, eveneens onbewezen maar niet zonder een minstens voorlopige voldoende reden vooropgesteld. Zo zegt Barker, o.c., 24 (Euclidian geometry) dat David Hilbert (1862/1943) de begrippen "punt / lijn / vlak / incident / tussen / congruent" vooropstelde en E.V. Huntington enkel "sfeer / sluit in" als basisconcepten voor de hele euclidische meetkunde.

2. Daaruit moeten, indien het systeem 'sluit', alle stellingen die de omvang van de begripsinhouden bloot trekken, strikt deductief bewijsbaar afgeleid worden.

Punt 1 en 2 verrechtvaardigen de naam "axiomatisch deductief".

Waarheid van dergelijke systemen: - Aristoteles, sprekend over dergelijke axiomatisch - deductieve systemen, stelt dat zij objectieve - ontologisch te begrijpen - waarheid bevatten. Dat wordt door intellectuelen die niet voldoende met het ontologisch taalgebruik vertrouwd zijn, vaak betwijfeld. Doch ziehier:

1. Het antiek Griekse (alètheia in Grieks) alètheia, onverborgenheid, is allereerst een louter fenomenologisch begrip. Wie dus aan axiomatiek en deductie daaruit doet, vertrekt van gegevens (fenomenen, d.i. wat zich direct toont, d.i. waarheid in de strikt fenomenologische zin).

2. Zelfs de meest bizarre en fantastische geestesconstructies, voor zover zij niet contradictorisch op zich zijn, zijn 'formae', realiteiten, zijnden, niet-nietsen en dus binnen strikt ontologisch taalgebruik, 'objectief'. Beide vermelde eigenschappen van axiomatisch - deductieve systemen maken samen dat zij op haar manier "objectieve werkelijkheid"", d.i. realiteit in de ontologische zin, tonen.

Dit verklaart waardoor D. Van Dale, *Filosofische grondslagen der wiskunde,* Assen / Amsterdam, 1978-4, de zeer zinnige vraag kan stellen, 'Bestaan er verzamelingen? (Existentievraag) en "Wat zijn verzamelingen?" (Essentievraag). Maar dat is uitgerekend pure ontologie, m.a.w. wiskundige geestesproducten.

4. 3. 7 Volledig bewijs

In oud Grieks 'epicheirèma' (aanpak, operatiebasis). Aristoteles definieert 'epicheirèma' als "kort betoog". Hij bedoelt daarmee een syllogisme waarin iedere voorzin van bewijs voorzien wordt. Wanneer wij daarop ingaan, dan kan dit als volgt gedefinieerd worden: "Een reeks redeneerverrichtingen (basisbegrip), in een volgorde die stap voor stap alle en liefst enkel alle redenen omvat (toegevoegd begrip) zo dat een volledig bewijs geleverd wordt (gedefinieerd begrip)".

Opm.: (1) De deelterm "alle en enkel alle" in bovenstaande definitie toont dat er summatieve of aristotelische inductie mee gemoeid is. (2) Een in wiskunde en computerwezen frequent procédé, nl. het 'algoritme', is daarvan één type. In de XII-de eeuw werden de rekenregels (overgenomen uit India) van de islamitische wiskundige Al Chwarizmi in het Latijn vertaald met als titel "Algorismi de numero Indorum". De term 'algoritme' dateert van die tijd. Hij betekent eveneens "een doelgerichte reeks logisch verantwoorde denkverrichtingen". Wij geven een paar voorbeelden. Zij vertolken beiden toevallig een deductief bewijs.

Juridisch. M. T. Cicero (-106/-43), in zijn Pro Milone (Redevoering t.v.v. Milo), ontwikkelt een stap - voor - stapbewijs en wel in de vorm van een syllogisme.

VZ 1. Voor alle gevallen geldt dat het in geweten verantwoordbaar is een onrechtvaardig aanvaller - o.g.v. gewettigde zelfverdediging - zelf eerst te doden. Bewijs. (a) De natuurwet (versta: de met de algemene natuur van de mens als mens meegegeven gewetensregels), (b) de positieve (ook 'stellige') wet (versta: de door mensen ingevoerde wetgevingen) verantwoorden dergelijke zelfverdediging.

Opm.: Cicero stelt hiermee een ethisch-juridisch axioma of 'principe' voorop inzake moraal en wettigheid.

VZ 2. Welnu, Clodius, die Milo bedreigde, was zo'n onrechtvaardig aanvaller. Bewijs. (a) Clodius' misdadig verleden ("zijn antecedenten"), (b) zijn bedenkelijke escorte, (c) de aangetroffen wapens zijn het bewijs van zijn onrecht terzake. Opm.: Milo's situatie als onrechtvaardig aangevallene is een singuliere toepassing van het universele axioma in VZ 1 uiteengezet. Meteen is het deductieve karakter van Cicero' s redenering duidelijk.

NZ. Dus Milo mocht Clodius eerst doden.

Wiskundig. Bibl. st.: J. Anderson / H. Johnstone, Jr., *Natural Deduction (The Logical Basis of Axiom Systems)*, Belmont (Cal.), 1962,4.

Te bewijzen: x((y + z) + w) = (xy + xz) + xw.

Tot de reeds gegeven axioma's behoort: x (y + z) = xy + xz.

1. O.g.v. het axioma: x((y + z) + w) = x (y + z) + xw.

2. O.g.v. hetzelfde axioma: x(y + z) + xw = (xy + xz) + xw.

Wat te bewijzen was.

Stellers: "A mathematical assertion is proved by exhibiting it as the consequence of assumptions" (Een wiskundige stelling wordt bewezen door aan te tonen dat zij de gevolgtrekking is van vooropstellingen (axioma's)).

Opm.: Meteen is hiermee een minuscuul exemplaar gegeven van wat men heet "de axiomatisch - deductieve redenering": aan de hand van axioma's redeneert men van een gegeven formule naar een te bewijzen (gevraagde) formule. Louter logisch gezien is er tussen Cicero's redenering (aan de hand van een axioma redeneert hij over de vraag of Milo gewetensvol handelde of niet) en die van Anderson / Johnstone, Jr. (aan de hand van een axioma redeneren zij over de vraag of de gevraagde formule bewijsbaar is of niet) geen wezenlijk verschil. In beide gevallen redeneert men stap - voor - stap in een sluitende volgorde, het door Aristoteles genoemde 'epicheirèma', d.i. streng logische aanpak.

4. 3. 8 Analyse (lettertaal)

Bibl.st.: O. Willmann, Geschichte des Idealismus, III (Der Idealismus der Neuzeit), Braunschweig, 1907-2, 48ff. Fr. Viète (Lat.: Vieta; 1540/1603) was een Platonicus, bekend met de lemmatisch-analytische methode: men doet alsof het GV (gevraagde, gezochte, het onbekende) reeds GG (gegeven, bekend) was en voert dat reeds gegevene in, in de vorm van een lemma of 'prolèpsis'. Zo wordt in de wiskunde dat lemma b.v. aangeduid met 'x'

Cijferrekenen. "Logistica numerosa". Voor Viète kende de westerse wiskunde praktisch enkel het cijferrekenen. Zo b.v. "3+4 = 7".

Letterrekenen. "Logistica speciosa". In zijn In artem analyticam isagoge (Inleiding tot de analyse) werkte Viète met Platoische ideeën, in het Latijn 'species'. Dat geeft "ideatief rekenen". Een idee is een universele verzameling. Gevolg: i.p.v. met singuliere of zelfs particuliere getallen werkte hij met universele getallen. Volgend schema verduidelijkt de evolutie.

GEWONE TAAL	CIJFERTAAL	LETTERTAAL
De som van twee getallen	3+4=7	a+b=c
niet-operatief	operatief	operatief
universeel	niet-universeel	universeel

I.M. Bochenski, *Wijsgerige methoden in de moderne wetenschap,* Utr./Antw., 1961, 55v. (Eidetische en operatieve zin), licht toe.

(a) Een teken heeft 'eidetische' betekenis indien men er de werkelijkheid van kent waarop het slaat (de semantische duiding is gekend).

(b) Een teken heeft slechts 'operatieve' betekenis indien men weet hoe er mee om te gaan zonder aan de eidetische of semantische betekenis te denken. "Wij weten niet wat het teken betekent, wel hoe wij ermee kunnen opereren". (O. c., 55).

Dit laatste is duidelijk het geval met cijfertaal (niet - universeel) maar overduidelijk met lettertaal (universeel) want letters zijn 'invulbaar' door - in beginsel - om het even welk cijfergetal. Wat omgekeerd niet het geval is.

Indien de eidetische betekenis gekend is - b.v. 3 + 4-, dan is er meteen een operatieve zin voorhanden (b.v. 3 + 4 = 7). Niet omgekeerd: men kan een teken een operatieve betekenis toekennen zonder enige semantische betekenis (b.v. a + b = c).

Logische syntaxis. - Zo stichtte Viète met zijn letters als lemma's een syntactische (= operatieve wiskunde). De analyse is dus de uitwerking van wat men met die lemma's (lege hulzen) inzake wiskundige bewerkingen - logisch verantwoord - kan doen. Zo ontstond b.v. de analytische meetkunde". De naam getuigt van de lemmatisch analytische methode.

Wie louter operatief werkt, werkt met lemma's van een bijzonder type: de algemene inhoud (b.v. a als bekend getal) is wel gekend, maar als een lege huls die op invulling wacht (b.v. a als 3).

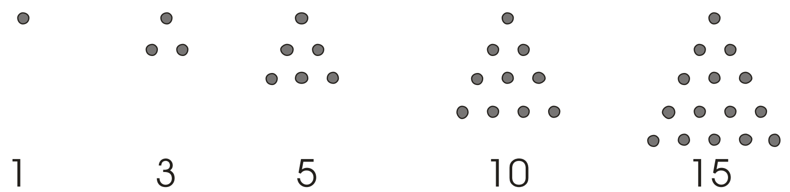
Viète's procédé is tweemaal Platonisch.

1. Het procédé is ideatief, want hij werkt met ideeën als lege hulzen met universele draagwijdte (b.v. a staat voor alle mogelijke cijfers als invullingen) en dus met verzamelingen.

2. De ideeën zijn ipso facto lemma's, aanwendbaar in de loop van een analyse juist o.g.v. de invullingen en de daarbij horende bewerkingen (wat het operatief karakter van de wiskundige ideeën toont). - Zelf zegt Viète: “Analyse is het werken met het gevraagde (‘queaesiteria’) alsof het gegeven (‘concescum’) was zo dat aan de hand van de gevolgtrekkingen daaruit het gevraagde zelf bloot komt.”

Opm. De regel van drie toont dit: “ Indien 100% (de universele idee) 25 is en indien 1 % (het singuliere exemplaar) 25/100 is dan is 10% 10.25/100”. Het gevraagde zelf is het resultaat d.i. 10.25/100; het lemma is 10% dat via 100% en 1% bloot getrokken wordt. Tevens blijkt dat analyse er in bestaat het gevraagde in de vorm van het lemma (het alsof gegeven; hier 100%) te situeren in een netwerk van betrekkingen, hier de structuur van de regel van drie.

Opm. De driehoeksgetallen der Pythagoreeërs: Deze bekomt men door telkens de opeenvolgende natuurlijke getallen bij elkaar op te tellen. Beeldt men ze in ruimtelijke structuren af dan vormen ze gelijkbenige driehoeken.



De volgende structuur omvat telkens de vorige plus een nieuwe basis eraan toegevoegd. Deze driehoeksgetallen beantwoorden aan de formule van Heath: $N = n(n+1)/2$ waarin N het totale aantal eenheden voorstelt, en n het aantal eenheden die de basis van de driehoek uitmaken.

Deze formule is de idee als lemma voor de visualiserende modellen der Pythagoreeërs met hun driehoeksgetallen.

Uitbreidingen. Willmann, o.c., 48f Viète’s revolutie werd uitgewerkt.

1. Functietheorie. De onbekende (‘lemma’) a kan vervangen worden door x, d.i. een veranderlijke (variabele) onbekende. Zo: $x = y+z$, waarbij x de afhankelijk veranderlijke is en y en z onafhankelijk veranderlijken zijn zo dat x ‘functie’ is van y+z.

2. Analytische meetkunde. De naam ‘analytisch’ herinnert nog aan Plato’s ‘analusis’! R. Descartes (Géométrie (1637) en P. Fermat (1601/1665) stichtten zowat gelijktijdig in Viète’s spoor de ‘analytische’ meetkunde. Zo de formule “$r^2 = x^2+y^2$”. Waarbij r de ‘radius’ (straal) van de cirkel is, getekend tegen de achtergrond van de cartesiaanse coördinaten (twee elkander rechthoekig kruisende lijnen, de X-as en de Y-as). Uitgetekende cirkels zijn wel “illustratieve modellen" maar zij zijn weinig of niet zelfs operatief. De lettercijfers in hun veranderlijke vorm zijn een algemene formule die alle mogelijke illustratieve cirkels samenvat.

3. Infinitesimaal rekenen. De aanloop daarvan is bij Nikolaas van Cusa (1401/1464) te vinden waar hij het heeft over de evolutie van kwantiteiten (onder pythagoreïsche invloed). G.W. Leibniz (in 1682) sticht de infinitesimale wiskunde (die met differentialen en integralen werkt).

Ziedaar de overgang van het 'eidetische' behandelen van kwantiteit en naar het 'operatieve' behandelen ervan. Zoals Bochenski zegt: wanneer wij in de omgang met operatieve formules 'slechts' de syntactische (tekens verbindende) regels toepassen, dan werkt een "logische syntaxis", een onderling verbinden van tekens op logische grondslag, perfect.

De logistiek zal dit nog veel verder uitwerken natuurlijk. Daar wordt logica een 'calculus', een rekenen, met 'lege' maar 'invulbare' symbolen. Een eindpunt van de Platoische lemmatisch - analytische methode.

4. 3. 9 Logische onafhankelijkheid der wiskunde

Bibl. st.: Ch. Lahr, *Cours*, 564/566 (*Mathématiques modernes et géométries non - - euclidiennes*). A. Virieux-Reymond, L'épistémologie, PUF, 1966,48/52 (La méthode axiomatique).

Logische onafhankelijkheid. Een model. In de traditionele rekenkunde definieert men een breuk door van meetbare gegevens te vertrekken: "Deel een appel in tweeën" of "Deel het getal 10 door 2". 'Modern' wordt het als volgt: "Een verzameling van twee getallen, a en b, indien geschikt in de volgende configuratie a/b, is een breukgetal". Een der eigenschappen wordt verwoord als volgt: "Twee breukgetallen, a/b en c/d indien ad = bc, zijn gelijk". Uit dergelijke definities is een theorie over de breukgetallen deduceerbaar zonder op zintuiglijke aanschouwing beroep te doen. Dat 'zonder' is "de logische onafhankelijkheid" (van de zintuiglijke intuïtie) van de 'moderne' wiskunde, zoals zij in de loop van de XIX-de eeuw geconstrueerd werd. Zij zou haar 'waarde' behouden zelfs indien er nooit meetbare grootheden bestonden. Zij trekt haar 'verantwoording' uit haar contradictievrij systeemkarakter.

Men begint met reine symbolen als taal waarin basisbegrippen en basisaxioma's geformuleerd (in formules uitgedrukt) worden waaruit men - onafhankelijk van iedere zintuiglijke aanschouwing, volgens deductieregels - stellingen deduceert. Dat heet 'formalisering' en laat 'calculus' (logisch rekenen) toe binnen een axiomatisch - deductief systeem.

Niet-euclidische meetkunde. De definitie door Euclides van een rechte is logisch afhankelijk van de zintuiglijke intuïtie die wij van een "rechte lijn" hebben. Gaat men echter onafhankelijk van iedere zintuiglijke intuïtie te werk, dan kan men aan de euclidische definitie het axioma van Bernhard Riemann (1826/1866) toevoegen, nl. "Door een punt buiten een rechte kan men geen parallelle rechte trekken". Dat schept een niet-euclidische ruimtewiskunde. Of men kan er het axioma van Nikolaï Lobatsjevski (1792/1865) aan toevoegen, nl. "Door een punt buiten een rechte kan men een oneindig aantal parallelle rechten trekken". De logische geldigheid van de ruimtewiskunden van Riemann en Lobatsjevski is gelijk aan die van Euclides.

Het werkelijkheidskarakter der geformaliseerde getal- en ruimtewiskunden hangt af van hoe men het begrip 'werkelijkheid' definieert. Indien 'werkelijk' b.v. betekent "buiten de menselijke geest bestaande", dan zijn constructies als de geformaliseerde wiskunden' onwerkelijk'. Definieert men echter 'werkelijk' ontologisch, dan is 'werkelijk' "alwat hoe dan ook niet niets maar iets is". De constructies van de menselijke geest - van de pure sciencefiction of de utopie naar de logistiek of de geformaliseerde wiskunden - zijn "niet niets" en dus ontologisch werkelijk. Logische onafhankelijkheid behelst nog niet dat zij buiten het domein der welbegrepen - en niet met niet-ontologische opvattingen verwarde - ontologie geraakt. Jammer: heel wat zelfs intellectueel gevormden verwarren ontologisch taalgebruik met wat zij daarvan menen te weten! Terloops: dit boek heeft een korte uiteenzetting over wat ontologie (werkelijkheidsleer) is om juist dergelijke verwarringen uit de wereld te helpen.

Dit hoofdstukje samengevat: Wiskunde is toegepaste logica, maar eveneens een logisch samenhangend systeem van objectieve zinnen. Voor de enen is zij een constructie van de geest, voor de anderen een werkelijkheid op zich. Nog anderen zien ze als een verwezenlijking van Platonische ideeën.

Wiskunde kan gedefinieerd worden als de wetenschap van de kwantiteit en de ruimte, en van het symbolenstelsel dat kwantiteit en ruimte verbindt".

Volgens wiskundigen is de wiskunde is de enige wetenschap die definitieve en onherroepelijke bewijzen levert, terwijl de andere vakwetenschappen situatief toetsen.

Eén gelijkbenige driehoek kan model staan voor alle andere gelijkbenige driehoeken. Vanuit die ene driehoek kan men aantonen dat de tegenoverliggende hoeken noodzakelijk gelijk zijn. Zo is een amplificatieve inductie logisch verantwoord.

De som van een aantal opeenvolgende oneven getallen, te beginnen met 1, kan men via steekproeven vaststellen en er de regel in ontdekken. Dankzij algebraïsering kan men vanuit deze summatieve inductie, de formule voor alle gevallen vinden en zo tot de amplificatieve inductie komen.

G. Peano, een der stichters van de logistiek, definieert het begrip "positief gehele getal" vanuit een aantal vooropstellingen, zo dat de inhoud en de omvang ervan worden vastgelegd. Definitie en deducties vormen samen een axiomatisch deductief systeem. De zinnen van een axiomatisch - deductieve uiteenzetting vormen een systeem van gelijkenis en samenhang. Mits preciseringen blijft de definitie van Aristoteles' axiomatisch - deductieve methode geldig.

Ontologisch gezien bestaat een axiomatisch deductief systeem uit een eindig aantal onbewezen basisbegrippen en een eindig aantal basisstellingen. Daaruit moeten alle stellingen die de omvang van de begripsinhouden bloot trekken, deductief afgeleid.

Aristoteles stelt dat zij ontologisch objectieve waarheid bevatten.

'Epicheirèma' kan gedefinieerd worden als een reeks opeenvolgende redeneerverrichtingen, die alle en liefst enkel alle redenen omvat zo dat een volledig bewijs geleverd wordt . Het 'algoritme', is daarvan één type.

De lemmatisch - analytische methode doet alsof het GV reeds GG was en voert dat reeds gegevene in, in de vorm van een lemma. Viète vormde het cijferrekenen om tot letterrekenen, waardoor hij operatief met universele getallen kon werken. Viète's revolutie ziet men verder uitgewerkt in de functietheorie, de analytische meetkunde en de infinitesimaalrekening die met differentialen en integralen werkt. De logistiek zal dit nog verder uitwerken.

De logische onafhankelijkheid der wiskunde bestaat erin dat uit definities een theorie deduceerbaar is zonder op de zintuiglijke aanschouwing een beroep te moeten doen. Zij trekt haar 'verantwoording' uit haar contradictievrij systeemkarakter. Dat heet 'formalisering' en laat 'calculus' (logisch rekenen) toe binnen een axiomatisch - deductief systeem.

Gaat men onafhankelijk van iedere zintuiglijke intuïtie te werk, dan kan men niet - euclidische vormen van meetkunde scheppen. Het werkelijkheidskarakter hangt af van de definitie - ontologisch of niet - die men aan het begrip 'werkelijkheid' wil geven.

Personenregister

Al Chwarizmi, 330
Anderson J., 331
Aristoteles, 327, 328, 329, 330, 331, 336
Barker St., 329
Beth E. W., 327, 328, 329
Bochenski I., 332, 334
Bolzano B., 327
Chlebny J., 324
Cicero, 330, 331
Davis P. J., 323
Descartes R., 333
Euclides, 325, 335
Fermat P., 333
Hersh R., 323
Hilbert D., 329
Jevons W., 325
Johnstone H., 331
Lahr Ch., 323, 324, 334

Leibniz G., 334
Lions P. L., 324
Lobatsjevski N., 335
Parmenides, 327
Plato, 328, 333
Riemann B., 335
van Cusa Nikolaas, 334
Van Dale D., 330
Virieux-Reymond A., 326, 334
Willmann O., 331, 333