4.3. Pensée mathématique

4.3.1 Une définition préliminaire

Que les mathématiques soient de la logique appliquée est tellement évident que nous ne nous attardons pas sur cet argument. Que les mathématiques sous leur forme actuelle - ou plutôt la richesse de leurs formes - soient "un système logiquement cohérent de phrases objectives" n'est pas si évident.

1. Son développement houleux fait qu'une seule personne peut difficilement en superviser l'ensemble.

2. Le problème est le terme "objectif". Les opinions divergent sur la base de la métaphysique qui s'y manifeste. Le nominaliste dira volontiers qu'il s'agit d'une construction de l'esprit qui "reste en l'air", pour ainsi dire, à moins qu'il n'y ait des applications mathématiques supplémentaires. L'abstractionniste y voit sa propre forme de réalité en soi tandis que l'idéatif y voit une réalisation d'idées. En tout état de cause, les fondateurs de la logistique étaient essentiellement des platoniciens.

Quantité : - Ch. Lahr, *Logique*, Paris, 1933-27, 559 / 569 (*Les sciences mathématiques*) affirme : "Les mathématiques sont la science de la quantité".

Lahr définit la "quantité" comme étant à la fois une quantité mathématique de nombres et une quantité mathématique d'espace. -Note : Très brièvement, il faut considérer le grand nombre d'équations mathématiques dont la forme de base est le différentiel "plus grand que / égal à / moins grand que". Ce qui doit clairement être compris quantitativement. Pour la géométrie ou les mathématiques de l'espace, le quantitatif est évident à sa manière.

Une nouvelle définition. - P.J. Davis / R. Hersh, L'*Univers mathématique*, Paris, 1985, 6 dit : une définition naïve, à sa place dans le dictionnaire et convenant comme première approximation, dit : "Les mathématiques sont la science de la quantité et de l'espace".

1. Les auteurs ajoutent : "... ainsi que du système de symboles qui relie la quantité et l'espace".

2. Ils affirment en outre que a. cette définition "repose sur des bases historiques réelles" et qu'ils en font leur point de départ pour ensuite b. dépeindre les développements des mathématiques depuis les derniers siècles et les différentes interprétations des mathématiques dans la définition élargie. - Reste que l'arithmétique (aspect quantitatif) et la géométrie (aspect spatial) pour Davis et Hershrestent des points de départ pour des raisons historiques et pratiques.

Une définition substantielle des mathématiques dans ses formes actuelles doit donc plutôt être comprise comme un lemme, c'est-à-dire une définition provisoire.

4.3.2 Preuves mathématiques et non mathématiques.

Exemple bibliographique : J. Chlebny. *Les maths font leurs preuves*, in Journal de Genève, Gazette de Lausanne 10/11.09.1994. - Lors du 22e Congrès international de mathématiques (Zurich), P.L. Lions s'est vu décerner (né en 1956) la marque d'honneur Fields pour son travail méritoire dans le domaine des mathématiques appliquées.

La distinction entre les preuves mathématiques et non mathématiques. - Voir ici comment Lions l'exprime ainsi. - Si les mathématiciens ne sont parfois pas très populaires auprès de certains scientifiques, c'est en raison de l'importance considérable que les mathématiciens attachent à la preuve.

1. *Les mathématiques*. - Les mathématiques sont la seule science qui apporte des preuves définitives et irrévocables, basées sur une sorte de réduction qui aboutit à un résultat indiscutable". Ainsi Chlebny.

2. *Non mathématique*. - Les autres sciences de la matière testent une théorie par rapport à une expérience. Celles-ci comportent inévitablement des inexactitudes.

Modèle applicatif. - Selon la physique, la chute des corps est régie par une loi très simple. Cependant, l'observation en elle-même n'est pas une preuve. Il faut tenir compte, par exemple, du frottement de l'air, du temps nécessaire pour que l'équipement utilisé réagisse. La loi, bien que théorique, ne peut donc pas être testée exactement. - Voilà pour le rapport Clebny.

Note - On peut se demander si tous les physiciens sont d'accord. Cependant, il est un fait que les preuves non mathématiques (d'une loi, d'une théorie, etc.) sont situationnelles, c'est-à-dire qu'elles se produisent dans un contexte de circonstances avec l'influence d'autres personnes. Alors que les preuves mathématiques se déroulent en dehors de ces situations, et sont mises sur papier dans l'esprit pur.

Note - Ch. Lahr, *Logique,* Paris, 1933-27, 566/569 (*la démonstratrice*) dit que les principaux types de raisonnement en mathématiques sont les suivants.

1. Déductive. Les axiomes et les propositions dérivées de ces axiomes servent de fondements suffisants pour une déduction logiquement rigoureuse des autres conclusions qui en découlent.

2. Réductif - On pose (sous forme de lemme) un théorème à prouver, puis on procède pas à pas (algorithme) à la preuve (sous forme d'analyse).

Remarque : cela est correct dans une mathématique empirique, mais dans un système axiomatique-déductif, ce second type, dit réductif, équivaut à une preuve déductive basée sur les axiomes et les théorèmes qui en sont déduits. - On pense à ce que l'on appelle l'induction mathématique, par exemple

4.3.3 Induction mathématique

Échantillon bibliographique : W.St. Jevons., *Logique,* 168/171. Nous nous arrêtons pour examiner ce que dit l'auteur de la proposition.

Induction géométrique. Euclide, *Éléments*, 1 : 5, déclare : "Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux entre eux". Note : Ils sont le modèle métaphorique ou égalitaire l'un de l'autre. Preuve. On trace correctement un triangle isocèle. On montre que si les côtés sont égaux, alors les angles opposés sont nécessairement égaux. Remarque : les angles opposés sont des modèles métonymiques ou de cohérence des côtés car, bien qu'ils ne soient pas semblables, ils leur sont liés (et fournissent des informations sur leurs côtés, (cf. 6.9)). Euclide s'en tient à ce seul échantillon. Le triangle unique est un paradigme qui permet de résumer tous les modèles possibles dans et à travers ce modèle unique. Le fait que cela soit possible dépend de l'exigence absolue - ceteris paribus - qu'il s'agisse de triangles isocèles. En d'autres termes, l'induction sommative est ici limitée à un seul échantillon avec la condition des triangles isocèles. Une induction amplificatrice est donc logiquement justifiée.

L'induction mathématique des nombres. Jevons donne un paradigme. Étant donné : les deux premiers nombres impairs consécutifs, 1 et 3. Si on les additionne, leur somme est 1+3 = 4 = 2 x 2. Étant donné : trois de ces nombres, 1 + 3 + 5, dont la somme est 9 = 3 x 3. Analogiquement : 1 + 3 + 5+ 7 = 16 = 4 x 4. On peut déjà voir la "règle" ! Il s'agit d'une induction sommative (trois échantillons), résumée dans l'énoncé suivant : "Jusqu'à présent, la somme de tous les nombres tels (notez notre terme "tels", qui est une similitude) est égale à la deuxième puissance du nombre de nombres". L'induction amplificatrice suit maintenant grâce à l'algébrisation (nombres lettres).

Etant donné : n nombre de nombres impairs consécutifs, commençant par 1.

Hypothèse : "Le droit établi est valable jusqu'au nième terme inclus".

Ce qui donne : $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) = n^2$.

On l'applique maintenant au successeur 2n+1 : $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) + (2n+l)$.

La somme de ce dernier nombre avec tous les précédents est identique à $(n+l)^2$.

Décision générale : "Si la loi est valable pour n termes, alors la loi est également valable pour n+ 1 termes". On voit le terme "décision générale" où "général" interprète l'induction qui élargit les connaissances.

Remarque de Jevons. La seule différence avec l'induction géométrique ci-dessus est que les cas choisis sont les premiers de l'ensemble des entiers pour des raisons de clarté. L'accent est mis sur la faiblesse du nombre de tests choisis. En tant qu'inductions sommatives, elles suffisent à une condition, à savoir qu'elles fournissent une certitude logique.

Note : Fondamentalement, les paradigmes délibérément choisis sont des paradigmes aléatoires dont la possibilité d'enquête suscite la préférence. Mais il n'y a rien de plus : puisqu'ils représentent une "loi" générale, ils sont fondamentalement aléatoires car ce qui est vrai pour les exemples choisis est vrai pour tout autre échantillon. u, "induction" dans l'une de ses principales significations signifie "échantillonnage". Dans les cas mathématiques ci-dessus, ils jouent le rôle d'échantillons paradigmatiques dans lesquels, dans et à travers le singulier, l'universel peut être saisi.

4.3.4 Définition axiomatique

Exemple bibliographique : A. Virieux-Reymond, *L'épistémologie*, PUF, 1966, 48/52 (*La méthode axiomatique*). G. Peano (1858/1932), l'un des fondateurs de la logistique, a défini le concept d'entier positif comme suit.

GG. Les termes logiques "classe" (ensemble), "membre d'une classe" (instance) et "implication" (implication : si, alors) ; les termes mathématiques "nombre", "0", "1, 2 ..." (instances du nombre), "a, b ... "(lettres-nombres) sont "supposés connus" (phénomène ou donné).

GV. Définition qui établit à la fois le contenu et le champ d'application (ce dernier de manière déductive) du concept "entier positif". La solution apparaît dans les phrases suivantes.

- 1. Le successeur d'un nombre. Si a est un nombre, alors a+ (comprendre : a+ 1), c'est-à-dire le successeur de a, est également un nombre.

- 2. Deux nombres indiscernables ont également deux successeurs indiscernables. Si a et b sont des nombres et que a+ est identique à b+, alors a est égal à b.

- 3. Induction mathématique. Si s est une classe dont 0 est membre et si tout membre de s a un successeur dans la classe s, alors tout nombre est membre de s. Remarque Si une propriété est une caractéristique de 0 en tant que membre de la classe s et si cette propriété est aussi une caractéristique du successeur de 0, alors c'est une caractéristique de tous les nombres de cette classe.

En d'autres termes, la propriété en question est une propriété commune à toutes les instances du terme en question. - On généralise à partir de 0 et 0+ à tous les autres membres de la classe (concept) S.

- 4. L'entier positif. Si a est un nombre, alors a+ (le successeur de a) n'est pas 0.

Abrégé. 1. 0 est un nombre. 2. Le successeur d'un nombre est un nombre. 3. Plusieurs nombres ne peuvent pas avoir le même successeur. 4. 0 n'est le successeur d'aucun nombre. 5. Induction mathématique (voir ci-dessus).

Le ***système***. Bien que les phrases - les axiomes - soient mutuellement irréductibles (et donc indépendantes les unes des autres, sinon il y a redondance), elles ne sont valables que collectivement et doivent être mutuellement cohérentes (sans contradiction). Ce n'est qu'à cette condition qu'ils forment un système logique. Ces axiomes sont une définition telle que le contenu, tout le contenu et seulement tout le contenu du concept "entier positif" est distinguable du reste de tout ce qui est.

La ***grandeur***. Puisque 0 est un nombre, la formation de dizaines, de centaines, etc. est possible au sein du système, mais puisque 0 n'est le successeur d'aucun nombre, les nombres négatifs - au sein du système, donc - sont inconcevables ("inexistants"). La portée change si l'on abandonne la phrase "Si a est un nombre, alors a+ n'est pas 0" et qu'on la remplace par "0 est le successeur de -1", alors - comme on le dit - le système s'affaiblit et les nombres négatifs deviennent "concevables" à l'intérieur de ce système plus étendu qui est alors en fait un autre système. La taille à laquelle le contenu se réfère est montrée par la totalité de toutes les opérations arithmétiques possibles que les axiomes autorisent, et qui constituent sa richesse infinie.

On voit que le système constituant la définition est un concept dont le contenu est exprimé dans les phrases et dont la portée est révélée par les opérations (déductions) possibles à partir de la définition. L'ensemble des déductions forme avec la définition un "système axiomatico-déductif".

4.3.5 La méthode axiomatique-déductive aristotélicienne

Échantillon bibliographique : E.W. Beth, *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano,* (*La philosophie des mathématiques de Parménide à Bolzano),* Anvers/Nimègue, 1944, 63vv. L'auteur traite la notion de "méthode axiomatique - déductive" avec Aristote dans le contexte de ses notions de mathématiques de l'époque. Il appelle cela la "théorie aristotélicienne de la science", contre laquelle il convient de noter qu'outre la science déductive, Aristote connaissait également la science réductrice.

Définition de "science déductive". Elle inclut comme définition de concept ce qui suit. W est l'abréviation symbolique d'un système de phrases tel que :

1. toutes les phrases de W s'appliquent à un champ (domaine) défini de données (objets) "réelles" ;

2. toutes les phrases de W sont "vraies" ;

3. si certaines phrases appartiennent à W, toute déduction logique à partir de ces phrases appartient également à W ;

4. un nombre fini de termes peut être désigné de telle sorte que :

a. la signification de ces termes ne nécessite pas d'explication supplémentaire ;

b. la signification de tous les autres termes figurant dans W peut être décrite à l'aide de ces seuls termes **;**

5. il existe un nombre fini de phrases dans W telles que :

a. la vérité de ces phrases est évidente ;

b. toutes les autres phrases de W sont logiquement déductibles de ces phrases. L'évaluation de Beth se résume à ceci :

- Ad 1. qui interprète le "réalisme" platonicien-aristotélicien.

- Cela définit la méthode déductive.

- Ad 4b et 5b. Cela définit, selon Beth la similitude et la cohérence, ce que Platon appelait "stoicheiosis" (doctrine des éléments). appelé "stoicheiosis" (doctrine des éléments).

Critique. Celle-ci se résume à ceci. Le "réalisme" doit être compris dans le sens strictement ontologique de "la conviction que tout ce qui n'est pas rien mais quelque chose est "réel"". Ainsi, l'expression "ax + b = c" n'est pas rien mais quelque chose et donc ontologiquement quelque chose de réel. La définition de la stoïcéose peut être plus large que la théorie concernant les "premiers axiomes" d'une méthode déductive. Elle est exposée ailleurs dans ce livre (cf. 9.2) comme la théorie de l'ordre de Platon basée sur la similitude et la cohérence. Mais il est vrai que l'application ici en est un cas : les phrases d'un récit déductif axiomatique forment un système de similarité et de cohérence.

Re 4a et 5a. C'est ce qu'on appelle le "postulat d'évidence". On peut en effet discuter de ce que signifient, dans le langage d'Aristote, "n'avoir besoin d'aucune autre explication" et "être évident". Il est obligé d'être limité dans le temps à cet égard. Mais ailleurs (cf. 1.2.4), nous discutons de la mauvaise interprétation par les éristiciens (en particulier Electra) du concept d'évidence d'Aristote. Une théorie plus récente des axiomes spécifie plus précisément ce qu'il faut entendre par "ne nécessitant pas d'autre explication" dans ce contexte. Toute la question est de savoir si Aristote, si nous l'interprétons comme ses œuvres le montrent, rejetterait ces précisions plus récentes. Le fait qu'il n'ait fait aucune déclaration, par exemple, concernant l'origine (induction, abstraction) des axiomes, signifie seulement que, comme tout penseur, il n'a pas prévu, et encore moins répondu, à toutes les questions qui se sont posées après lui.

Conclusion. Sa définition de la méthode axiomatico-déductive, sous réserve de précisions, est essentiellement valable.

4.3.6 Le système axiomatique déductif au sens ontologique.

Échantillon bibliographique : St. Barker, *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs 5N.J.), 1964, 23f. (Terms, Axioms) ; - E.W. Beth, *The Philosophy of Mathematics*, Antw./Nijmeg, 1944, 63 ff. (En résumant ces travaux et en les améliorant si nécessaire, la structure du système de jugements basé sur des axiomes et les élaborant déductivement se résume à ce qui suit.

1. Un système axiomatico-déductif comprend :

a. un nombre fini de notions de base ("termes primitifs") qui sont présupposées non prouvées mais qui ne sont pas choisies sans raison suffisante (même si elle est provisoire) (comme nous l'avons vu dans la définition de Peano de l'entier positif) ;

b. un nombre fini de propositions fondamentales ("théorèmes primitifs" ou axiomes), également non prouvées, mais non sans qu'une raison suffisante provisoire ait été postulée. Ainsi, Barker dit o.c., 24 (géométrie euclidienne) que David Hilbert (1862/1943) a présupposé les concepts "point / ligne / plan / incident / entre / congruent" et E.V. Huntington seulement "sphère / enfermer dans" comme concepts de base pour toute la géométrie euclidienne.

2. À partir de là, si le système "se ferme", toutes les propositions qui exposent la portée du contenu du concept doivent être dérivées de manière strictement déductive et prouvable.

Les points 1 et 2 justifient l'appellation "axiomatique déductive".

La vérité de ces systèmes : - Aristote, en parlant de ces systèmes axiomatiques - déductifs, affirme qu'ils contiennent une vérité objective - ontologiquement compréhensible. Cette affirmation est souvent mise en doute par des intellectuels qui ne sont pas suffisamment familiarisés avec le langage ontologique. Voir ici :

1. Grec ancien (alètheia en grec) alètheia, la non-dissimulation, est avant tout un concept purement phénoménologique. Ceux qui font donc de l'axiomatique et de la déduction à partir de celle-ci partent de données (les phénomènes, c'est-à-dire ce qui se montre directement, c'est-à-dire la vérité au sens strictement phénoménologique).

2. Même les constructions mentales les plus bizarres et les plus fantastiques, dans la mesure où elles ne sont pas contradictoires en elles-mêmes, sont des "formae", des réalités, des êtres, des non-nobles et donc, dans un langage strictement ontologique, "objectives". Les deux propriétés susmentionnées des systèmes axiomatico-déductifs leur permettent de montrer la "réalité objective" à leur manière, c'est-à-dire la réalité au sens ontologique.

Cela explique pourquoi D. Van Dale, *Filosofische grondslagen der wiskunde*, Assen / Amsterdam, 1978-4, peut poser la question très sensée : "Les ensembles existent-ils ? (Question sur l'existence) et "Que sont les ensembles ?" (Question sur l'essence). (question de l'essence). Mais il s'agit là d'ontologie pure, en d'autres termes, de produits de l'esprit mathématique.

4.3.7 Preuves complètes

En grec ancien, "epicheirèma" (approche, base d'opération). Aristote définit l'"epicheirèma" comme un "argument court". Il entend par là un syllogisme dans lequel chaque préposition est accompagnée d'une preuve. Si l'on s'en tient à cela, on peut le définir comme suit : "Une série d'opérations de raisonnement (concept de base), dans un ordre qui inclut pas à pas toutes et de préférence seulement toutes les raisons (concept ajouté) de telle sorte qu'une preuve complète soit fournie (concept défini)".

Note : (1) Le sous-terme "tout et seulement tout" dans la définition ci-dessus montre qu'il s'agit d'une induction sommative ou aristotélicienne. (2) Un processus fréquent en mathématiques et en informatique, à savoir l'"algorithme", en est un type. Au XIIe siècle, les règles de calcul (adoptées de l'Inde) du mathématicien islamique Al Chwarizmi ont été ont été traduites en latin sous le titre "Algorismi de numero Indorum". Le terme "algorithme" remonte à cette époque. Il signifie également "une série intentionnelle d'opérations de pensée logiques". Nous donnons quelques exemples. Tous deux interprètent une preuve déductive.

Juridique. M. T. Cicéron (-106/-43), dans son Pro Milone (Discours en faveur de Milo), développe une preuve étape par étape et ce, sous la forme d'un syllogisme.

Prémisse 1. Dans tous les cas, il est justifiable en conscience de tuer un agresseur injuste - au titre de la légitime défense - en commençant par soi-même. Preuve. (a) Le droit naturel (comprendre : les règles de conscience transmises par la nature générale de l'homme en tant qu'être humain), (b) le droit positif (également "stellaire") (comprendre : les lois introduites par les êtres humains) justifient une telle légitime défense.

Note : Cicéron pose ici un axiome ou "principe" éthico-juridique concernant la moralité et la légalité.

Prémisse 2. Eh bien, Clodius, qui a menacé Milo, était un agresseur aussi injuste. Preuves à l'appui. (a) le passé criminel de Clodius ("ses antécédents"), (b) son escorte douteuse, (c) les armes trouvées sont la preuve de sa faute en la matière. Note : La situation de Milo, injustement attaqué, est une application singulière de l'axiome universel énoncé dans VZ 1. Immédiatement, la nature déductive du raisonnement de Cicéron est claire.

Conclusion : Milo a donc été autorisé à tuer Clodius en premier.

Mathématiques. Échantillon bibliographique : J. Anderson / H. Johnstone, *Natural Deduction (The Logical Basis of Axiom Systems),* Belmont (Cal.), 1962,4.

Prouver : $x((y + z) + w) = (xy + xz) + xw$.

Les axiomes déjà donnés comprennent : x (y + z) = xy + xz.

1. Basé sur l'axiome : x((y + z) + w) = x (y + z) + xw.

2. Basé sur le même axiome : x(y + z) + xw = (xy + xz) + xw.

Ce qui était prouvable.

L'auteur : "Une affirmation mathématique est prouvée en la montrant comme la conséquence d'hypothèses".

Note : Immédiatement, ceci fournit un minuscule spécimen de ce que l'on appelle le "raisonnement axiomatico-déductif" : en utilisant des axiomes, on raisonne d'une formule donnée à une formule à prouver (exigée). En termes purement logiques, entre le raisonnement de Cicéron(sur la base d'un axiome, il raisonne sur la question de savoir si Milo a agi en toute conscience ou non) et celui d'Anderson / Johnstone (sur la base d'un axiome, ils raisonnent pour savoir si la formule demandée est prouvable ou non) ne diffèrent pas substantiellement. Dans les deux cas, on raisonne pas à pas dans un ordre concluant, l'"epicheirèma" mentionné par Aristote appelé "epicheirèma", c'est-à-dire l'approche strictement logique.

4.3.8 Analyse (littérale)

Exemple bibliographique : O. Willmann.*Geschichte des Idealismus*, III (*Der Idealismus der Neuzeit), Braunschweig*, 1907-2, 48ff. Le père Viète (latin : Vieta ; 1540/1603) était un platonicien, familier de la méthode lemmatico-analytique : on prétend que le GV (demandé, cherché, l'inconnu) était déjà GG (donné, connu) et on introduit ce déjà donné, sous la forme d'un lemme ou d'une 'prolèpsis'. En mathématiques, par exemple, ce lemme est désigné par "x

Arithmétique des nombres. "Logistica numerosa". Avant Viète, les mathématiques occidentales ne connaissaient pratiquement que l'arithmétique numérique. Ainsi, par exemple, "3+4 = 7".

Lettre maths. "Logistica speciosa". Dans son In artem analyticam isagoge (Introduction à l'analyse), Viète a travaillé avec des idées platoniciennes, en latin "species". Cela donne "l'arithmétique idéative". Une idée est un ensemble universel. Conséquence : au lieu de travailler avec des nombres singuliers ou même privés, il travaille avec des nombres universels. Le schéma suivant clarifie l'évolution.

LANGAGE CLAIR	LANGAGE NUMÉRIQUE	LANGAGE LITTÉRAL
La somme de deux nombres	3 + 4 = 7	a + b = c
non opératoire	opératoire	opératoire
universel	non universel	universel

I.M. Bochenski, *Wijsgerige methoden in de moderne wetenschap*,, Utr./Antw., 1961, 55v. (sens eidétique et opératif), lit.

(a) Un signe a une signification "eidétique" si l'on connaît la réalité à laquelle il se réfère (l'interprétation sémantique est connue).

(b) Un signe n'a de sens "opératoire" que si l'on sait s'en servir sans penser à son sens eidétique ou sémantique. "Nous ne savons pas ce que le signe signifie, mais nous savons comment opérer avec lui". (O. c., 55).

C'est clairement le cas pour le langage des nombres (non universel), mais c'est aussi le cas pour le langage des lettres (universel), car les lettres peuvent être remplies par n'importe quel nombre, en principe. Ce qui, à l'inverse, n'est pas le cas.

Si le sens eidétique est connu - par exemple 3+4-, un sens opératoire est immédiatement disponible (par exemple 3+4=7). Et non l'inverse : on peut attribuer un sens opératoire à un signe sans aucune signification sémantique (par exemple, a+b=c).

Syntaxe logique. - Viète a donc fondé une syntaxe (= mathématique opératoire) avec ses lettres comme lemmes. L'analyse est donc l'élaboration de ce que l'on peut faire avec ces lemmes (coquilles vides) concernant les opérations mathématiques - logiquement justifiées. C'est ainsi qu'est née, par exemple, la géométrie analytique". Le nom témoigne de la méthode analytique lemmatique.

Ceux qui sont purement opérationnels travaillent avec des lemmes d'un type particulier : le contenu général (par exemple a comme nombre connu) est connu, mais comme une coquille vide qui attend d'être remplie (par exemple a comme 3).

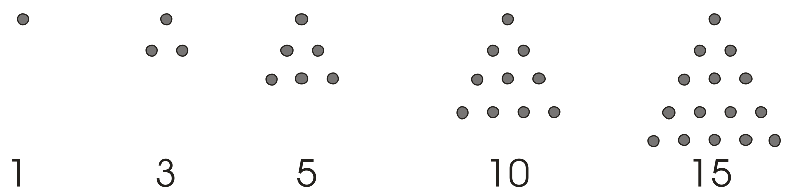
La démarche de Viète est doublement platonicienne.

1. Le processus est idéationnel, car il travaille avec des idées comme des coquilles vides à portée universelle (par exemple, a représente tous les nombres possibles comme des remplissages) et donc avec des ensembles.

2. Les idées sont ipso facto des lemmes, utilisables au cours d'une analyse précisément en vertu des remplissages et des opérations correspondantes (ce qui montre le caractère opératoire des idées mathématiques). - Viète lui-même dit : "L'analyse consiste à travailler avec le demandé ('queaesiteria') comme s'il était donné ('concescum') de telle sorte que, sur la base de ses déductions, le demandé lui-même soit mis à nu".

Note La règle de trois montre ceci : "Si 100% (l'idée universelle) est 25 et si 1% (l'instance singulière) est 25/100, alors 10% est 10,25/100". La demande elle-même est le résultat, c'est-à-dire 10,25/100 ; le lemme est 10% tracé à travers 100% et 1% exposé. Il apparaît également que l'analyse consiste à situer le demandé sous la forme du lemme (le comme si donné ; ici 100%) dans un réseau de relations, ici la structure de la règle de trois.

Remarque Les nombres triangulaires des pythagoriciens : ils sont obtenus en ajoutant à chaque fois des nombres naturels successifs. Si on les représente dans des structures spatiales, ils forment des triangles isocèles.



Dans chaque cas, la structure suivante comprend la précédente plus une nouvelle base qui lui est ajoutée. Ces nombres triangulaires répondent à la formule de Heath : $N = n(n+1)/2$ où N représente le nombre total d'unités et n le nombre d'unités constituant la base du triangle.

Cette formule est l'idée d'un lemme pour les modèles de visualisation des Pythagoriciens avec leurs nombres triangulaires.

Extensions. Willmann, o.c., 48f La révolution de Viète a été élaborée.

1. Théorie fonctionnelle. L'inconnue ("lemme") a peut être remplacée par x, c'est-à-dire une variable (variable) inconnue. En d'autres termes, $x = y+z$, où x est le variable dépendant et y et z : x = y+z, où x est la variable dépendante et y et z sont des variables indépendantes telles que x est une "fonction" de y+z.

2. Géométrie analytique. Le nom "analytique" rappelle encore l'"analusis" de Platon !de Platon ! R. Descartes (Géométrie (1637) et P. Fermat (1601/1665) ont fondé la géométrie "analytique" presque simultanément dans le sillage de Viète. D'où la formule "$r^2 = x^2+y^2$". Où r est le "rayon" du cercle, tracé sur fond de coordonnées cartésiennes (deux droites se coupant rectangulairement, l'axe X et l'axe Y). Les cercles tracés sont en effet des "modèles illustratifs", mais ils sont peu ou pas du tout opérationnels. Les lettres chiffres sous leur forme variable sont une formule générale résumant tous les cercles illustratifs possibles.

3. L'arithmétique infinitésimale. Le point de départ de cette démarche se trouve chez Nicolas de Cusa (1401/1464) où il parle de l'évolution des quantités (sous l'influence pythagoricienne). G.W. Leibniz (en 1682) fonde les mathématiques infinitésimales (travail sur les différentielles et les intégrales).

On passe d'un traitement "eidétique" de la quantité à un traitement "opératoire" de celle-ci. Comme le dit Bochenski lorsque, dans le traitement des formules opératoires, on applique "seulement" les règles syntaxiques (connexion des signes), alors une "syntaxe logique", une interconnexion des signes sur une base logique, fonctionne parfaitement.

La logistique va bien sûr beaucoup plus loin. La logique y devient un "calcul", une arithmétique, avec des symboles "vides" mais "remplissables". Un point final de la méthode platonicienne lemmatique - analytique.

4.3.9 Indépendance logique des mathématiques

Exemple bibliographique : Ch. Lahr, *Cours*, 564/566 (*Mathématiques modernes et géométries non -euclidiennes*). A. Virieux-Reymond, *L'épistémologie*, PUF, 1966,48/52 (La méthode axiomatique).

L'indépendance logique. Un modèle. En arithmétique traditionnelle, on définit une fraction en partant de données mesurables : "Diviser une pomme en deux" ou "Diviser le nombre 10 par 2". En arithmétique "moderne", on la définit comme suit : "Un ensemble de deux nombres, une fraction et un nombre : "Un ensemble de deux nombres, a et b, s'il s'inscrit dans la configuration suivante a/b, est une fraction de nombre". L'une des propriétés est exprimée comme suit : "Deux nombres fractionnaires, a/b et c/d si ad = bc, sont égaux". De telles définitions permettent de déduire une théorie des fractions sans recours au sens. Ce "sans" est "l'indépendance logique" (par rapport à l'intuition du sens) des mathématiques "modernes", telles qu'elles se sont construites au cours du XIXe siècle. Elle conserverait sa "valeur" même si les grandeurs mesurables n'existaient pas. Elle tire sa "justification" de son caractère de système sans contradiction.

On commence par des symboles purs en tant que langage dans lequel les concepts et les axiomes de base sont formulés (exprimés sous forme de formules) et à partir desquels on déduit des théorèmes - indépendamment de toute perception sensorielle, selon des règles de déduction. C'est ce qu'on appelle la "formalisation", qui permet le "calcul" (arithmétique logique) dans le cadre d'un système axiomatique et déductif.

Géométrie non euclidienne. La définition d'Euclide d'une ligne droite dépend logiquement des intuitions sensorielles que nous avons d'une "ligne droite". Cependant, indépendamment de toute intuition sensorielle, on peut ajouter à la définition euclidienne l'axiome de Bernhard Riemann (1826/1866), à savoir "Par un point situé en dehors d'une ligne, on ne peut pas tracer une ligne parallèle". Cela crée un espace mathématique non euclidien. On peut aussi ajouter l'axiome de Nikolaï Lobachevsky (1792/1865), à savoir "Par un point extérieur à une ligne, on peut tracer un nombre infini de lignes parallèles". La validité logique des mathématiques spatiales de Riemann et de Lobachevsky est équivalente à celle d'Euclide.

Le caractère réel des mathématiques formalisées des nombres et de l'espace dépend de la définition que l'on donne à la "réalité". Si "réel" signifie, par exemple, "existant en dehors de l'esprit humain", alors les constructions telles que les mathématiques formalisées sont "irréelles". En revanche, si l'on définit le "réel" d'un point de vue ontologique, alors le "réel" est "tout ce qui n'est en aucun cas rien, mais quelque chose". Les constructions de l'esprit humain - de la science-fiction pure ou de l'utopie à la logistique ou aux mathématiques formalisées - ne sont pas "rien" et sont donc ontologiquement réelles. L'indépendance logique n'implique pas encore de sortir du domaine de l'ontologie bien comprise - et non confondue avec des conceptions non ontologiques. Dommage : beaucoup de personnes, même intellectuellement formées, confondent le langage ontologique avec ce qu'elles croient savoir à ce sujet ! Soit dit en passant, ce livre expose brièvement ce qu'est l'ontologie (théorie de la réalité) afin de dissiper ce genre de confusion.

4.3.1. Ce chapitre résume

Les mathématiques sont une logique appliquée, mais aussi un système logiquement cohérent de phrases objectives. Pour certains, il s'agit d'une construction de l'esprit, pour d'autres d'une réalité en soi. D'autres encore y voient une réalisation des idées platoniciennes.

Les mathématiques peuvent être considérées comme la science de la quantité et de l'espace, et du système de symboles reliant la quantité et l'espace".

Selon les mathématiciens, les mathématiques sont la seule science qui fournit des preuves définitives et irrévocables, alors que les autres sciences de la matière fournissent des tests situationnels.

Un triangle isocèle peut servir de modèle à tous les autres triangles isocèles. À partir de ce seul triangle, on peut montrer que les angles opposés sont nécessairement égaux. L'induction amplificatrice est donc logiquement justifiée.

On peut déterminer la somme d'un certain nombre de nombres impairs consécutifs, à partir de 1, par échantillonnage et y découvrir la règle. Grâce à l'algébrisation, à partir de cette induction sommative, on peut trouver la formule pour tous les cas et arriver ainsi à l'induction amplificatrice.

G. Peano, l'un des fondateurs de la logistique, définit le concept d'entier positif à partir d'un certain nombre de prémisses, de sorte que son contenu et sa portée sont fixés. La définition et les déductions forment ensemble un système déductif axiomatique. Les phrases d'un récit axiomatico-déductif forment un système de similitude et de cohérence. Sous réserve d'éclaircissements, la définition d'Aristote reste la suivante. La méthode axiomatico-déductive reste valable.

D'un point de vue ontologique, un système axiomatique déductif se compose d'un nombre fini de notions de base non prouvées et d'un nombre fini de propositions de base. À partir de celles-ci, tous les théorèmes qui exposent la portée du contenu des concepts doivent être déduits.

Aristote affirme qu'ils contiennent une vérité ontologiquement objective.

L' "épicheirèma" peut être défini comme une série d'opérations de raisonnement successives, couvrant toutes et de préférence seulement toutes les raisons, de sorte qu'une preuve complète est fournie. L'"algorithme" en est un exemple.

La méthode lemmatique - analytique prétend que le GV était déjà GG et introduit ce qui est déjà donné, sous forme de lemme. Viète a transformé l'arithmétique des nombres en arithmétique des lettres, ce qui lui a permis de travailler de manière opérationnelle avec les nombres universels. La révolution de Viète peut être considérée comme plus élaborée dans la *théorie des fonctions, la géométrie analytique et le calcul infinitésimal travaillant avec les différentielles et les intégrales. La logistique développera ce point plus en détail.*

L'indépendance logique des mathématiques consiste dans le fait qu'à partir des définitions, une théorie peut être déduite sans faire appel à la perception sensorielle. Elle tire sa "justification" de son caractère de système sans contradiction. Cela s'appelle la "formalisation" et permet le "calcul" (arithmétique logique) au sein d'un système axiomatico-déductif.

Si l'on procède indépendamment de toute intuition sensorielle, on ne peut pas créer de formes géométriques euclidiennes. Le caractère de la réalité dépend de la définition - ontologique ou non - que l'on veut donner au concept de réalité.