4.3. Mathematisches Denken

Inhalt

4.3.1 Eine vorläufige Definition

Dass Mathematik angewandte Logik ist, ist so offensichtlich, dass wir uns nicht mit dem Argument aufhalten. Dass die Mathematik in ihrer gegenwärtigen Form - oder vielmehr Fülle von Formen - "ein logisch kohärentes System von objektiven Sätzen" ist, ist nicht so offensichtlich.

1. Ihre stürmische Entwicklung bedeutet, dass eine einzelne Person sie kaum in ihrer Gesamtheit überblicken kann.

2. Das Problem ist der Begriff "objektiv". Je nach der Metaphysik, die sich darin zeigt, gehen die Meinungen auseinander. Der Nominalist wird sie gerne als eine Konstruktion des Verstandes bezeichnen, die sozusagen "in der Luft hängt", sofern es keine zusätzlichen mathematischen Anwendungen gibt. Der Abstraktionist sieht sie als eine eigene Form der Realität an sich, während der Ideative in ihr eine Verwirklichung von Ideen sieht. Auf jeden Fall waren die Begründer der Logistik im Wesentlichen Platoniker.

Menge: - Ch. Lahr, *Logique*, Paris, 1933-27, 559 / 569 (*Les sciences mathématiques*) stellt fest: "Die Mathematik ist die Wissenschaft der Quantität".

Lahr definiert "Menge" sowohl als mathematische Zahl als auch als mathematische Raummenge. -Anmerkung: Ganz kurz zu der riesigen Anzahl von mathematischen Gleichungen, die als Grundform das Differential "größer / gleich / kleiner als" haben. Was eindeutig quantitativ zu verstehen ist. Für die Geometrie oder die Raummathematik ist das Quantitative auf seine eigene Weise offensichtlich.

Eine neue Definition. - P.J. Davis / R. Hersh, *l' Univers mathématique,* Paris, 1985, 6 sagt: eine naive Definition, die ihren Platz im Wörterbuch hat und als erste Annäherung geeignet ist, lautet: "Mathematik ist die Wissenschaft von Menge und Raum".

1. Die Autoren fügen hinzu: "... sowie des Symbolsystems, das Menge und Raum verbindet".

2. Sie argumentieren weiter, dass a. diese Definition "auf realen historischen Gründen beruht" und dass sie sie zu ihrem Ausgangspunkt machen, um dann b. die Entwicklungen der Mathematik seit den letzten Jahrhunderten und die verschiedenen Interpretationen der Mathematik in der erweiterten Definition darzustellen. - Es bleibt dabei, dass Arithmetik (quantitativer Aspekt) und Geometrie (räumlicher Aspekt) für Davis und Hershaus historischen und praktischen Gründen Ausgangspunkte bleiben.

Eine inhaltliche Definition der Mathematik in ihrer heutigen Form ist dann eher als ein Lemma, d.h. als eine vorläufige Definition zu verstehen.

4.3.2 Mathematische und nicht-mathematische Nachweise.

Bibliographische Probe: J. Chlebny., *les maths font leur preuves*, in Journal de Genève, Gazette de Lausanne 10/11.09.1994. - Anlässlich des 22. Internationalen Mathematikkongresses (Zürich) wird P.L. Lions (geb. 1956) die Fields-Ehrennadel für seine verdienstvollen Arbeiten auf dem Gebiet der angewandten Mathematik.

Die Unterscheidung zwischen mathematischen und nicht-mathematischen Beweisen. - Sehen Sie hier, wie Lions es so ausdrückt. - Wenn Mathematiker bei manchen Wissenschaftlern nicht sehr beliebt sind, so liegt das an der großen Bedeutung, die Mathematiker dem Beweis beimessen.

1. ***Mathematisch***. - "Die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die endgültige und unwiderrufliche Beweise liefert, die auf einer Art Reduktion beruhen, die zu einem unbestreitbaren Ergebnis führt." So Chlebny.

2. ***Nicht mathematisch***. - Die anderen Fachwissenschaften prüfen eine Theorie anhand von Erfahrungen. Diese beinhalten zwangsläufig Ungenauigkeiten.

Anwendbares Modell. - Nach der Physik unterliegt der Fall von Körpern einem sehr einfachen Gesetz. Die Beobachtung an sich ist jedoch kein Beweis. Man muss z. B. die Reibung in der Luft und die Zeit berücksichtigen, die die verwendeten Geräte für eine Reaktion benötigen. Das Gesetz ist zwar theoretisch, kann aber nicht genau getestet werden. - So viel zu Clebnys Bericht.

Anmerkung: Ob sich alle Physiker einig sind, ist fraglich. Fakt ist jedoch, dass nicht-mathematische Beweise (eines Gesetzes, einer Theorie z.B.) situativ sind, d.h. in einem Kontext von Umständen mit den geschehenen Einflüssen anderer stattfinden. Mathematische Beweise hingegen finden außerhalb solcher Situationen statt, - zu Papier gebracht im reinen Verstand.

Anmerkung - Ch. Lahr, *Logique*, Paris, 1933-27, 566/569 (*la démonstratrice*) sagt, dass die wichtigsten Arten der Argumentation in der Mathematik die folgenden sind.

1. Deduktiv. Axiome und aus diesen Axiomen abgeleitete Sätze dienen als hinreichende Grundlage für die logisch strenge Ableitung weiterer Schlussfolgerungen aus ihnen.

2. Reduktiv: Man stellt (als Lemma) ein Theorem auf, das bewiesen werden soll, und führt dann Schritt für Schritt (algorithmisch) den Beweis (als Analyse).

Anmerkung: Dies ist in einer empirischen Mathematik richtig, aber in einem axiomatisch-deduktiven System läuft dieser zweite, so genannte reduktive Typ auf einen deduktiven Beweis auf der Grundlage der Axiome und der daraus abgeleiteten Theoreme hinaus. - Man denke z.B. an die sogenannte mathematische Induktion.

4.3.3 Mathematische Induktion

Bibliographische Probe: W. St. Jevons., *Logic*, 168/171. Wir halten inne und überlegen, was der Autor sagt.

Geometrische Induktion. Euklid, *Elemente,* 1: 5, sagt: "Die Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich". Anmerkung: Sie sind das metaphorische oder gleichnishafte Modell füreinander. Beweis. Man zeichnet korrekt ein gleichschenkliges Dreieck. Man zeigt, dass wenn die Seiten gleich sind, dann sind die gegenüberliegenden Winkel notwendigerweise gleich. Bemerkung: Die gegenüberliegenden Winkel sind metonymische oder kohärente Modelle der Seiten, weil sie zwar nicht ähnlich sind, aber mit ihnen in Beziehung stehen (und Informationen über ihre Seiten liefern, (vgl. 6.9)). Euklid belässt es bei diesem einen Beispiel. Das eine Dreieck ist ein Paradigma, so dass in und durch dieses eine Modell alle möglichen Modelle zusammengefasst werden. Dass dies möglich ist, steht und fällt mit der absoluten Voraussetzung - ceteris paribus -, dass es sich um gleichschenklige Dreiecke handelt. Mit anderen Worten: Die summative Induktion ist hier auf ein einziges Muster mit der

Bedingung gleichschenkliger Dreiecke beschränkt. Eine amplifikative Induktion ist also logisch gerechtfertigt.

Zahlenmathematische Induktion. Jevons gibt ein Paradigma vor. Gegeben: die beiden ersten aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, 1 und 3. Wenn man sie addiert, ist ihre Summe 1+3 = 4 = 2 x 2. Gegeben: drei solcher Zahlen, 1 + 3 + 5, deren Summe 9 = 3 x 3 ist. Analog dazu: 1 + 3 + 5+ 7 = 16 = 4 x 4. Man kann die "Regel" bereits erkennen! Es handelt sich um eine summative Induktion (drei Beispiele), zusammengefasst in der Aussage "Bisher ist die Summe aller solcher (man beachte unseren Begriff 'solche', der Ähnlichkeit bedeutet) Zahlen gleich der zweiten Potenz der Zahl der Zahlen". Nun folgt die amplifikatorische Induktion dank der Algebraisierung (Buchstabenzahlen).

Gegeben: n aufeinanderfolgende ungerade Zahlen, die mit 1 beginnen.

Hypothese: "Das geltende Recht gilt bis einschließlich des n-ten Terms".

Das ergibt: $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) = n^2$.

Dies wird nun auf den Nachfolger 2n+1 angewendet: $1+3+5+7+ \ldots (2n-l) + (2n+l)$.

Die Summe dieser letzten Zahl mit allen vorherigen ist identisch mit $(n+l)^2$.

Allgemeine Entscheidung: "Wenn das Gesetz für n Begriffe gilt, dann gilt das Gesetz auch für n+ 1 Begriffe". Man sieht den Begriff "allgemeine Entscheidung", wobei "allgemein" die wissenserweiternde Induktion interpretiert.

JevonsBemerkung. Der einzige Unterschied zur obigen geometrischen Induktion besteht darin, dass die gewählten Fälle aus Gründen der Übersichtlichkeit die ersten aus der Menge der ganzen Zahlen sind. Die geringe Anzahl der gewählten Tests wird hervorgehoben. Als summative Induktionen genügen sie unter einer Bedingung, nämlich dass sie logische Gewissheit liefern.

Anmerkung: Im Grunde sind die bewusst gewählten Paradigmen zufällige Paradigmen, deren Erhebbarkeit eine Präferenz hervorruft. Mehr aber auch nicht: Da sie ein allgemeines "Gesetz" repräsentieren, sind sie grundsätzlich zufällig, denn was für die ausgewählten Beispiele gilt, gilt auch für jede andere Stichprobe. u, "Induktion" bedeutet in einer seiner Hauptbedeutungen "Stichprobe". In den obigen mathematischen Fällen spielen sie die Rolle von paradigmatischen Stichproben, in denen im und durch das Singuläre das Universelle erfasst werden kann.

4.3.4 Axiomatische Definition

Bibliographische Probe: A. Virieux-Reymond, *L'épistémologie*, PUF, 1966, 48/52 (*La méthode axiomatique*). G. Peano (1858/1932), einer der Begründer der Logistik, definierte den Begriff der positiven ganzen Zahl wie folgt.

GG. Die logischen Begriffe "Klasse" (Menge), "Mitglied einer Klasse" (Instanz) und "Implikation" (Folgerung: wenn, dann); die zahlenmathematischen Begriffe "Zahl", "0", "1, 2 ..." (Instanzen von Zahl), "a, b ... " (Buchstabenzahlen) sind "vermeintlich bekannt" (Phänomen oder gegeben).

GV. Definition, die sowohl Inhalt als auch Umfang (letzteres deduktiv) des Begriffs "positive ganze Zahl" festlegt. Die Lösung kommt in den folgenden Sätzen vor.

- 1. Der Nachfolger einer Zahl. Wenn a eine Zahl ist, dann ist a+ (zum Verständnis: a+ 1), d.h. der Nachfolger von a, auch eine Zahl.

- 2. Zwei ununterscheidbare Zahlen haben auch zwei ununterscheidbare Nachfolger. Wenn a und b Zahlen sind und a+ dasselbe ist wie b+, dann ist a gleich b.

- 3. Mathematische Induktion. Wenn s eine Klasse ist, in der 0 ein Mitglied ist, und jedes Mitglied von s einen Nachfolger innerhalb der Klasse s hat, dann ist jede Zahl ein Mitglied von s. Bemerkung Wenn eine Eigenschaft ein Merkmal von 0 als Mitglied der Klasse s ist und wenn diese Eigenschaft auch ein Merkmal des Nachfolgers von 0 ist, dann ist sie ein Merkmal aller Zahlen in dieser Klasse.

Oder anders ausgedrückt: Die betreffende Eigenschaft ist eine gemeinsame Eigenschaft aller Instanzen des betreffenden Begriffs. - Man verallgemeinert ausgehend von 0 und 0+ auf alle anderen Mitglieder der Klasse (Begriff) S.

- 4. Die positive ganze Zahl. Wenn a eine Zahl ist, dann ist a+ (der Nachfolger von a) nicht 0.

Abgekürzt. 1. 0 ist eine Zahl. 2. Der Nachfolger einer Zahl ist eine Zahl. 3. Mehrere Zahlen können nicht denselben Nachfolger haben. 4. 0 ist nicht der Nachfolger einer Zahl. 5. Mathematische Induktion (siehe oben).

System. Die Sätze - Axiome - sind zwar gegenseitig irreduzibel (und damit unabhängig voneinander, sonst gibt es Redundanz), aber sie sind nur gemeinsam gültig und müssen untereinander konsistent (widerspruchsfrei) sein. Nur dann bilden sie ein logisches System. Diese Axiome sind eine solche Definition, dass der Inhalt, der gesamte Inhalt und nur der gesamte Inhalt des Begriffs "positive ganze Zahl" vom Rest von allem, was ist, unterscheidbar ist.

Größenordnung. Da 0 eine Zahl ist, ist die Bildung von Zehnern, Hundertern usw. innerhalb des Systems möglich, aber da 0 nicht der Nachfolger irgendeiner Zahl ist, sind negative Zahlen - innerhalb des Systems - undenkbar ("nicht existent"). Das Ausmaß ändert sich, wenn wir den Satz "Wenn a eine Zahl ist, dann ist a+ nicht 0" fallen lassen und ihn durch "0 ist der Nachfolger von -1" ersetzen, dann - so heißt es - schwächt sich das System ab und negative Zahlen werden innerhalb dieses umfassenderen Systems, das dann eigentlich ein anderes System ist, "denkbar". Die Größe, auf die sich der Inhalt bezieht, zeigt sich in der Gesamtheit aller möglichen arithmetischen Operationen, die die Axiome erlauben und die ihren unendlichen Reichtum ausmachen.

Man sieht, dass das System, das die Definition ausmacht, ein Konzept ist, dessen Inhalt in den Sätzen ausgedrückt wird und dessen Tragweite sich aus den Operationen (Ableitungen) ergibt, die aus der Definition möglich sind. Zusammen mit der Definition bildet die Menge aller Ableitungen ein "axiomatisch-deduktives System".

4.3.5 Aristotelische axiomatisch-deduktive Methode

Bibliographische Probe: E.W. Beth, *De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano*, Antwerpen/Nijmegen, 1944, 63vv. Der Autor behandelt den Begriff der "axiomatisch-deduktiven Methode" bei Aristoteles im Zusammenhang mit seinen damaligen Vorstellungen von Mathematik. Er nennt dies "Aristotelische Wissenschaftstheorie", wogegen anzumerken ist, dass Aristoteles neben der deduktiven Wissenschaft auch die reduktive Wissenschaft kannte.

Definition der "deduktiven Wissenschaft". Sie enthält als Begriffsdefinition das Folgende. W ist eine symbolische Abkürzung für ein System von Sätzen, die so beschaffen sind, dass:

1. Alle Sätze von W beziehen sich auf einen definierten Umfang (Bereich) von "echten" Daten (Objekten);

2. Alle Sätze von W. sind "wahr";

3. Wenn einige Sätze zu W gehören, gehört jede logische Schlussfolgerung aus diesen Sätzen auch zu W;

4. Eine endliche Anzahl von Begriffen kann so bezeichnet werden, dass:

a. Die Bedeutung dieser Begriffe bedarf keiner weiteren Erläuterung;

b. die Bedeutung aller anderen in W vorkommenden Begriffe allein durch diese Begriffe beschrieben werden kann;

5. es gibt eine endliche Anzahl von Sätzen in W, so dass:

a. die Wahrheit dieser Sätze ist offensichtlich;

b. alle anderen Sätze von W sind aus diesen Sätzen logisch ableitbar. BethDie Einschätzung von Beth läuft darauf hinaus:

- Zu 1. das interpretiert den platonisch-aristotelischen "Realismus".

- Zu 3: Damit ist die deduktive Methode definiert.

- Zu 4b und 5b. Dies definiert, nach Beth, Ähnlichkeit und Kohärenz, was Platon Stoicheiosis" (Lehre von den Elementen) nannte.

Die Kritik. Diese läuft auf Folgendes hinaus. Realismus" ist im streng ontologischen Sinne zu verstehen, nämlich als "die Überzeugung, dass alles, was nicht nichts, sondern etwas ist, 'wirklich' ist". So ist der Ausdruck "ax + b = c" nicht nichts, sondern etwas und damit ontologisch etwas Reales. Die Stoicheiosis kann weiter gefasst werden als nur die Theorie der "ersten Axiome" einer deduktiven Methode. Sie wird an anderer Stelle in diesem Buch (vgl. 9.2) als Platonsdie auf Ähnlichkeit und Kohärenz beruhende Ordnungstheorie Platons. Aber zugegeben: die Anwendung hier ist ein Fall davon: die Sätze einer axiomatischen deduktiven Darstellung bilden ein System von Ähnlichkeit und Kohärenz.

- Zu 4a und 5a. Dies nennt man "das Beweispostulat". Man kann in der Tat darüber streiten, was in Aristoteles'Sprache "keiner weiteren Erklärung bedürfen" und "evident sein" bedeuten. Er ist dabei zwangsläufig zeitgebunden. Aber an anderer Stelle (vgl. 1.2.4) diskutieren wir die Fehlinterpretation von Aristoteles' Begriff der Offensichtlichkeit durch Eristiker (insbesondere Elektra). Eine neuere Theorie der Axiome spezifiziert genauer, was in diesem Zusammenhang unter "keiner weiteren Erklärung bedürfend" zu verstehen ist. Die ganze Frage ist: "Würde Aristoteles, wenn wir ihn so interpretieren, wie seine Werke ihn zeigen, diese neueren Präzisierungen ablehnen?". Dass er keine Aussagen z.B. über den Ursprung (Induktion, Abstraktion) der Axiome gemacht hat, bedeutet nur, dass er, wie jeder Denker, nicht alle Fragen nach ihm vorausgesehen, geschweige denn beantwortet hat.

Schlussfolgerung. Seine Definition der axiomatisch-deduktiven Methode ist, vorbehaltlich von Präzisierungen, im Wesentlichen gültig.

4.3.6 Das axiomatische deduktive System, ontologisch verstanden.

Bibliographische Beispiele: St. Barker, *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs 5N.J.), 1964, 23f. (Begriffe. Axiome); - E.W.Beth, *De wijsbegeerte der wiskunde*, Antw./Nijmeg., 1944, 63 ff. (Die aristotelische Wissenschaftstheorie); - Fasst man diese

Arbeiten zusammen und verbessert sie gegebenenfalls, so ergibt sich die Struktur des auf Axiomen basierenden und deduktiv erarbeiteten Urteilssystems wie folgt.

1. Ein axiomatisch-deduktives System umfasst:

a. eine endliche Anzahl von Grundbegriffen ("primitive Begriffe"), die unbewiesen vorausgesetzt werden, aber nicht ohne ausreichenden (wenn auch vorläufigen) Grund gewählt werden (wie wir bei Peanos Definition der positiven ganzen Zahl gesehen haben);

b. eine endliche Anzahl grundlegender Sätze ("primitive Theoreme" oder Axiome), die ebenfalls unbewiesen sind, aber nicht, ohne dass zumindest ein vorläufiger hinreichender Grund postuliert wird. So sagt Barke ro.c., 24 (Euklidische Geometrie), dass David Hilbert (1862/1943) die Begriffe "Punkt / Linie / Ebene / einfallend / zwischen / kongruent" und E.V. Huntington nur "Kugel / einschließen in" als Grundbegriffe für die gesamte euklidische Geometrie voraussetzte.

2. Daraus müssen, wenn das System "schließt", alle Sätze, die den Umfang des Begriffsinhalts offenlegen, streng deduktiv beweisbar abgeleitet werden.

Die Punkte 1 und 2 rechtfertigen die Bezeichnung "axiomatisch deduktiv".

Die Wahrheit solcher Systeme: - Aristoteles spricht von solchen axiomatisch-deduktiven Systemen und behauptet, dass sie eine objektive - ontologisch nachvollziehbare - Wahrheit enthalten. Dies wird von Intellektuellen, die mit der ontologischen Sprache nicht ausreichend vertraut sind, oft angezweifelt. Doch siehe hier:

1. Altgriechisch (alètheia auf Griechisch) alètheia, Unverborgenheit, ist in erster Linie ein rein phänomenologischer Begriff. Wer also Axiomatik und Deduktion daraus betreibt, geht von Daten aus (Phänomenen, d.h. dem, was sich unmittelbar zeigt, d.h. Wahrheit im streng phänomenologischen Sinne).

2. Selbst die bizarrsten und phantastischsten Gedankenkonstruktionen sind, sofern sie nicht in sich widersprüchlich sind, "formae", Wirklichkeiten, Wesenheiten, Nicht-Wesenheiten und damit in streng ontologischer Sprache "objektiv". Beide genannten Eigenschaften axiomatisch-deduktiver Systeme zusammen lassen sie auf ihre Weise "objektive Wirklichkeit", d.h. Wirklichkeit im ontologischen Sinne, erkennen.

Dies erklärt, warum D. Van Dale, *Filosofische grondslagen der wiskunde*, Assen / Amsterdam, 1978-4, die sehr sinnvolle Frage stellen kann: "Gibt es Mengen? (Existenzfrage) und "Was sind Mengen?" (Wesensfrage). Aber das ist reine Ontologie, mit anderen Worten, mathematische Geistesprodukte.

4.3.7 Vollständiger Nachweis

Im Altgriechischen "epicheirèma" (Ansatz, Grundlage der Tätigkeit). Aristoteles definiert 'epicheirèma' als "kurzes Argument". Darunter versteht er einen Syllogismus, in dem jede Präposition mit einem Beweis versehen ist. Wenn wir uns dem zuwenden, kann es wie folgt definiert werden: "Eine Reihe von Argumentationsoperationen (Grundbegriff), in einer Reihenfolge, die Schritt für Schritt alle und vorzugsweise nur alle Gründe (Zusatzbegriff) umfasst, so dass ein vollständiger Beweis erbracht wird (definierter Begriff)".

Anmerkung: (1) Der Unterbegriff "alles und nur alles" in der obigen Definition zeigt, dass es sich um eine summative oder aristotelische Induktion handelt. (2) Ein in der Mathematik und der Informatik häufiger Prozess, nämlich der "Algorithmus", ist eine Art davon. Im XII. Jahrhundert wurden die (aus Indien übernommenen) Rechenregeln des islamischen Mathematikers Al Chwarizmi unter dem Titel "Algorismi de numero Indorum" ins Lateinische übersetzt. Der Begriff "Algorithmus" geht auf diese Zeit zurück. Er bedeutet auch "eine zielgerichtete Reihe von logisch fundierten Denkoperationen". Wir geben ein paar Beispiele. In beiden Fällen geht es um die Interpretation eines deduktiven Beweises.

Juristisch. M. T. Cicero (-106/-43) entwickelt in seinem Pro Milone (Diskurs zugunsten von Milo) einen schrittweisen Beweis, und zwar in Form eines Syllogismus.

Prämisse 1. In allen Fällen ist es nach dem Gewissen vertretbar, einen ungerechtfertigten Angreifer - aus berechtigter Selbstverteidigung - zuerst selbst zu töten. Beweise. (a) Das Naturrecht (d.h. die mit der allgemeinen Natur des Menschen vermittelten Gewissensregeln), (b) das positive (auch "stellare") Recht (d.h. von Menschen eingeführte Gesetze) rechtfertigen eine solche Selbstverteidigung.

Anmerkung: Cicero stellt hiermit ein ethisch-rechtliches Axiom oder "Prinzip" bezüglich Moral und Legalität auf.

Prämisse 2. Nun, Clodius, der Milo bedrohte, war ein solcher ungerechter Angreifer. Beweise. (a) Clodius' kriminelle Vergangenheit ("seine Vorgeschichte"), (b) seine fragwürdige Begleitung, (c) die gefundenen Waffen sind Beweise für sein Fehlverhalten in dieser Angelegenheit. Anmerkung: Die Situation von Milo als zu Unrecht Angegriffener ist eine singuläre Anwendung des in VZ 1 dargelegten universellen Axioms. Unmittelbar wird der deduktive Charakter von Ciceros Argumentation deutlich.

Schlissfolgerung. Milo durfte also zuerst Clodius töten.

Mathematisch. Bibliographische Probe: J. Anderson / H. JohnstoneJr., *Natural Deduction (The Logical Basis of Axiom Systems),* Belmont (Cal.), 1962,4.

Zu beweisen: $x((y + z) + w) = (xy + xz) + xw$.

Zu den bereits genannten Axiomen gehört: $x (y + z) = xy + xz$.

1. Basierend auf dem Axiom: $x((y + z) + w) = x (y + z) + xw$.

2. Basierend auf demselben Axiom: $x(y + z) + xw = (xy + xz) + xw$.

Das war nachweisbar.

Der Autor: "Eine mathematische Behauptung wird bewiesen, indem man sie als Folge von Annahmen zeigt".

Anmerkung: Dies ist bereits ein winziges Beispiel für das, was man "axiomatisch-deduktives Denken" nennt: Mit Hilfe von Axiomen wird von einer gegebenen Formel auf eine zu beweisende (geforderte) Formel geschlossen. Rein logisch betrachtet, ist zwischen Cicero‘s (der auf der Grundlage eines Axioms darüber urteilt, ob Milo gewissenhaft gehandelt hat oder nicht) und der von Anderson / Johnstone Jr. (sie begründen auf der Grundlage eines Axioms, ob die geforderte Formel beweisbar ist oder nicht) unterscheiden sich nicht wesentlich. In beiden Fällen begründet man Schritt für Schritt in einer schlüssigen Ordnung, dem von Aristoteles erwähnten 'epicheirèma' epicheirèma' genannt, d.h. streng logisches Vorgehen.

4.3.8 Analyse (wörtlich)

Bibliographische Probe: O. Willmann., Geschichte des Idealismus, III (Der Idealismus der Neuzeit), Braunschweig, 1907-2, 48ff. P. Viète (lat. Vieta; 1540/1603) war Platoniker und mit der lemmatisch-analytischen Methode vertraut: Man tut so, als sei das GV (Gesuchte, Unbekannte) bereits GG (Gegebenes, Bekanntes) und führt das bereits Gegebene in Form eines Lemmas oder einer "Prolèpsis" ein. In der Mathematik zum Beispiel wird dieses Lemma mit "x" bezeichnet

Zahlenarithmetik. "Logistica numerosa". Vor Viète kannte die westliche Mathematik praktisch nur Zahlenarithmetik. Also z.B. "3+4 = 7".

Buchstaben-Mathematik. "Logistica speciosa". In seinem In artem analyticam isagoge (Einführung in die Analysis) arbeitete Viète mit platonischen Ideen, auf Lateinisch "species". Daraus ergibt sich die "ideative Arithmetik". Eine Idee ist eine universelle Menge. Konsequenz: Statt mit singulären oder gar privaten Zahlen zu arbeiten, arbeitete er mit universellen Zahlen. Das folgende Diagramm verdeutlicht die Entwicklung.

EINFACHE SPRACHE	NUMERISCHE SPRACHE	WÖRTLICHE SPRACHE
Die Summe von zwei Zahlen	3+4=7	a+b=c
nicht operativ	operativ	operativ
universell	nicht-universell	universell

I.M. Bochenski, *Wijsgerige methoden in de moderne wetenschap*, Utr./Antw., 1961, 55v. (Eidetischer und operativer Sinn), Lit.

(a) Ein Zeichen hat eine "eidetische" Bedeutung, wenn man die Realität des Zeichens kennt, auf die es sich bezieht (die semantische Interpretation ist bekannt).

(b) Ein Zeichen hat nur dann eine "operative" Bedeutung, wenn man weiß, wie man mit ihm umgehen kann, ohne an seine eidetische oder semantische Bedeutung zu denken. "Wir wissen nicht, was das Zeichen bedeutet, aber wir wissen, wie wir mit ihm umgehen können". (O. c., 55).

Letzteres ist bei der Zahlensprache (nicht - universell) eindeutig der Fall, bei der Buchstabensprache (universell) jedoch in überwältigender Weise, denn Buchstaben sind - im Prinzip - durch jede Zahl "füllbar". Was aber umgekehrt nicht der Fall ist.

Wenn die eidetische Bedeutung bekannt ist - z. B. 3+4-, dann ist eine operative Bedeutung sofort verfügbar (z. B. 3+4=7). Nicht umgekehrt: Man kann einem Zeichen ohne semantische Bedeutung eine operative Bedeutung zuweisen (z. B. a + b = c).

Logische Syntax. - Viète begründete also eine syntaktische (= operative Mathematik) mit seinen Buchstaben als Lemmata. Die Analyse ist also die Ausarbeitung dessen, was man mit diesen Lemmata (leeren Hüllen) an mathematischen Operationen machen kann - logisch begründet. So ist zum Beispiel die analytische Geometrie entstanden". Der Name zeugt von der lemmatischen analytischen Methode.

Diejenigen, die rein operativ tätig sind, arbeiten mit Lemmata eines besonderen Typs: Der allgemeine Inhalt (z.B. a als bekannte Zahl) ist bekannt, aber als leere Hülle, die darauf wartet, ausgefüllt zu werden (z.B. a als 3).

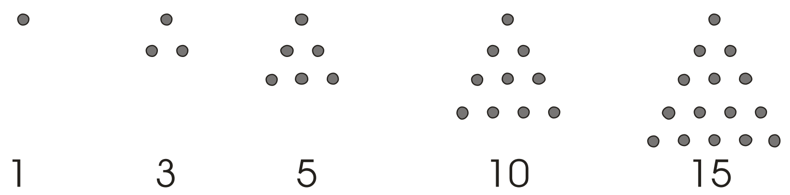
Das Verfahren von Viète ist doppelt platonisch.

1. Der Prozess ist ideell, denn er arbeitet mit Ideen als leeren Hüllen mit universellem Umfang (z.B. stellt a alle möglichen Zahlen als Füllungen dar) und damit mit Mengen.

2. Die Ideen sind ipso facto Lemmata, die gerade aufgrund der Füllungen und der entsprechenden Operationen (was den operativen Charakter der mathematischen Ideen zeigt) im Rahmen einer Analyse verwendbar sind. - Viète selbst sagt: "Die Analyse ist die Arbeit mit dem Geforderten ('queaesiteria'), als ob es gegeben wäre ('concescum'), und zwar so, dass auf der Grundlage ihrer Schlussfolgerungen das Geforderte selbst freigelegt wird."

Anmerkung: Der Dreisatz zeigt dies: "Wenn 100% (die universelle Idee) 25 ist und wenn 1% (der singuläre Fall) 25/100 ist, dann sind 10% 10,25/100". Das Geforderte selbst ist das Ergebnis, d.h. 10,25/100; das Lemma ist 10%, das durch 100% gezogen und 1% ausgesetzt wird. Es zeigt sich auch, dass die Analyse darin besteht, das Geforderte in Form des Lemmas (das als ob gegebene; hier 100%) in ein Beziehungsgeflecht, hier die Struktur des Dreisatzes, einzuordnen.

Bemerkung Die Dreieckszahlen der Pythagoräer: Sie ergeben sich aus der Addition aufeinander folgender natürlicher Zahlen. Wenn sie in räumlichen Strukturen dargestellt werden, bilden sie gleichschenklige Dreiecke.



In jedem Fall umfasst die folgende Struktur die vorherige und eine neue Basis, die zu ihr hinzugefügt wird. Diese Dreieckszahlen entsprechen der Heath-Formel: N = n(n+1)/2, wobei N für die Gesamtzahl der Einheiten und n für die Anzahl der Einheiten steht, die die Basis des Dreiecks bilden.

Diese Formel ist die Idee als Lemma für die Anschauungsmodelle der Pythagoräer mit ihren Dreieckszahlen.

Erweiterungen. Willmann, o.c., 48f Viète's Revolution wurde ausgearbeitet.

1. Funktionelle Theorie. Die Unbekannte ("Lemma") a kann durch x ersetzt werden, d. h. durch eine unbekannte Variable (variable). Daraus folgt: $x = y+z$, wobei x die abhängige Veränderliche ist und y und z unabhängige Veränderliche sind, so dass x eine "Funktion" von y+z ist.

2. Analytische Geometrie. Der Name "analytisch" erinnert noch an Platons's 'analusis'! R. Descartes (Géométrie (1637) und P. Fermat (1601/1665) begründeten die "analytische" Geometrie fast gleichzeitig im Gefolge von Viète. Daher die Formel "$r^2 = x^2+y^2$". Dabei ist r der "Radius" des Kreises, der vor dem Hintergrund kartesischer Koordinaten (zwei sich rechtwinklig schneidende Linien, die X-Achse und die Y-Achse) gezeichnet wird. Die gezeichneten Kreise sind zwar "anschauliche Modelle", aber sie sind wenig oder gar nicht operativ. Die Buchstabenzahlen in ihrer variablen Form sind eine allgemeine Formel, die alle möglichen Anschauungskreise zusammenfasst.

3. Infinitesimalarithmetik. Die Vorgeschichte dazu findet sich bei Nikolaus von Kues (1401/1464), wo er über die Entwicklung der Mengen (unter pythagoreischem Einfluss) spricht. G.W. Leibniz (1682) begründet die Infinitesimalmathematik (Arbeit mit Differentialen und Integralen).

Man beachte den Übergang von der "eidetischen" Behandlung der Menge zur "operativen" Behandlung. Wie Bochenski sagt: Wenn wir bei der Behandlung operativer Formeln "nur" die syntaktischen (zeichenverbindenden) Regeln anwenden, dann funktioniert eine "logische Syntax", eine Verknüpfung von Zeichen auf logischer Basis, perfekt.

Die Logistik wird dies natürlich noch viel weiter treiben. Dort wird die Logik zu einem "Kalkül", einer Arithmetik, mit "leeren", aber "füllbaren" Symbolen. Ein Endpunkt der platonischen lemmatischen - analytischen Methode.

4.3.9 Logische Unabhängigkeit der Mathematik

Bibliographische Probe: Ch. Lahr, *Cours*, 564/566 (*Mathématiques modernes et géométries non - -euclidiennes*). A. Virieux-Reymond, *L'épistémologie*, PUF, 1966,48/52 (La méthode axiomatique).

Logische Unabhängigkeit. Ein Modell. In der traditionellen Arithmetik definiert man einen Bruch, indem man von messbaren Daten ausgeht: "Teilt einen Apfel in zwei Hälften" oder "Teilt die Zahl 10 durch 2". 'Modern' wird er wie folgt: "Eine Menge von zwei Zahlen, a und b, ist eine Bruchzahl, wenn sie in die folgende Konfiguration a/b passt". Eine der

Eigenschaften wird wie folgt ausgedrückt: "Zwei Bruchzahlen, a/b und c/d, wenn ad = bc, sind gleich". Aus solchen Definitionen lässt sich eine Theorie der Brüche ableiten, ohne auf den Sinn zurückzugreifen. Dieses "ohne" ist die "logische Unabhängigkeit" (von der Sinnesintuition) der "modernen" Mathematik, wie sie im XIX. Jahrhundert entwickelt wurde. Sie würde ihren "Wert" auch dann behalten, wenn es keine messbaren Größen gäbe. Sie bezieht ihre "Rechtfertigung" aus ihrem widerspruchsfreien Systemcharakter.

Man beginnt mit reinen Symbolen als einer Sprache, in der Grundbegriffe und Grundaxiome formuliert sind (ausgedrückt in Formeln), aus denen man - unabhängig von jeder Sinneswahrnehmung - nach Regeln der Deduktion Theoreme ableitet. Dies wird "Formalisierung" genannt und ermöglicht das "Kalkül" (logisches Rechnen) innerhalb eines axiomatisch-deduktiven Systems.

Nicht-euklidische Geometrie. Die Definition von Euklid einer geraden Linie ist logisch abhängig von den Sinneseindrücken, die wir von einer "geraden Linie" haben. Unabhängig von den Sinneseindrücken kann man der euklidischen Definition jedoch das Axiom von Bernhard Riemann hinzufügen (1826/1866) hinzufügen, nämlich "Durch einen Punkt außerhalb einer Linie kann man keine parallele Linie ziehen". Dies schafft eine nicht-euklidische Raummathematik. Oder man könnte das Axiom von Nikolaï Lobachevsky (1792/1865) hinzufügen, nämlich "Durch einen Punkt außerhalb einer Linie kann man unendlich viele parallele Linien ziehen". Die logische Gültigkeit der Raummathematik von Riemann und Lobatschewski ist äquivalent zu der von Euklid.

Der Realitätscharakter der formalisierten Zahlen- und Raummathematik hängt davon ab, wie man "Realität" definiert. Wenn "real" z.B. bedeutet "außerhalb des menschlichen Geistes existierend", dann sind Konstruktionen wie die formalisierte Mathematik "unwirklich". Definiert man "real" jedoch ontologisch, dann ist "real" "alles, was auf jeden Fall nicht nichts, sondern etwas ist". Die Konstruktionen des menschlichen Geistes - von der reinen Science-Fiction oder Utopie bis zur Logistik oder formalisierten Mathematik - sind "nicht nichts" und damit ontologisch real. Logische Unabhängigkeit bedeutet noch nicht, den Bereich der wohlverstandenen - und nicht mit nicht-ontologischen Vorstellungen verwechselten - Ontologie zu verlassen. Schade: Viele selbst intellektuell geschulte Menschen verwechseln die ontologische Sprache mit dem, was sie darüber zu wissen glauben! Nebenbei bemerkt enthält dieses Buch eine kurze Erläuterung dessen, was Ontologie (Theorie der Realität) ist, um genau solche Verwirrungen zu beseitigen.

4.3.1. Dieses Kapitel fasst zusammen

Mathematik ist angewandte Logik, aber auch ein logisch kohärentes System von objektiven Sätzen. Für die einen ist sie eine Konstruktion des Geistes, für die anderen eine Realität an sich. Wieder andere sehen in ihr eine Verwirklichung platonischer Ideen.

Die Mathematik kann als Wissenschaft von Menge und Raum und vom System der Symbole, die Menge und Raum verbinden, festgehalten werden.

Nach Ansicht der Mathematiker ist die Mathematik die einzige Wissenschaft, die endgültige und unwiderrufliche Beweise liefert, während die anderen Wissenschaften situative Tests liefern.

Ein gleichschenkliges Dreieck kann ein Modell für alle anderen gleichschenkligen Dreiecke sein. Anhand dieses einen Dreiecks kann man zeigen, dass die gegenüberliegenden Winkel notwendigerweise gleich sind. Somit ist die verstärkende Induktion logisch gerechtfertigt.

Man kann die Summe einer Anzahl von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen, beginnend mit 1, durch Stichproben bestimmen und die Regel in ihnen entdecken. Dank der Algebraisierung kann man aus dieser summativen Induktion die Formel für alle Fälle finden und gelangt so zur amplifikativen Induktion.

G. Peano, einer der Begründer der Logistik, definiert den Begriff der positiven ganzen Zahl anhand einer Reihe von Prämissen, so dass sein Inhalt und sein Umfang festgelegt sind. Definition und Deduktionen bilden zusammen ein axiomatisch-deduktives System. Die Sätze einer axiomatisch-deduktiven Darstellung bilden ein System der Ähnlichkeit und Kohärenz. Unter der Voraussetzung von Klarstellungen bleibt die Definition von AristotelesDie axiomatisch-deduktive Methode bleibt gültig.

Ontologisch gesehen besteht ein axiomatisches deduktives System aus einer endlichen Anzahl von unbewiesenen Grundbegriffen und einer endlichen Anzahl von Grundaussagen. Von diesen müssen alle Theoreme, die den Umfang der Begriffsinhalte freilegen, deduktiv abgeleitet werden.

Aristoteles argumentiert, dass sie eine ontologisch objektive Wahrheit enthalten.

Epicheirèma" kann definiert werden als eine Reihe von aufeinanderfolgenden Begründungsoperationen, die alle und vorzugsweise nur alle Gründe abdecken, so dass ein vollständiger Beweis erbracht wird. Der "Algorithmus" ist eine Art davon.

Die lemmatisch - analytische Methode gibt vor, dass die GV bereits GG war und führt das bereits Gegebene in Form eines Lemmas ein. Viète verwandelte die Zahlenarithmetik in eine Buchstabenarithmetik, die es ihm ermöglichte, operativ mit universellen Zahlen zu arbeiten. Viètes Revolution lässt sich in der Funktionentheorie, der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung, die mit Differentialen und Integralen arbeitet, weiter ausarbeiten. Die Logistik wird dies weiter ausbauen.

Die logische Eigenständigkeit der Mathematik besteht darin, dass aus Definitionen eine Theorie ableitbar ist, ohne an die Sinneswahrnehmung appellieren zu müssen. Sie bezieht ihre "Rechtfertigung" aus ihrem widerspruchsfreien Systemcharakter. Dies wird als "Formalisierung" bezeichnet und ermöglicht das "Kalkül" (logisches Rechnen) innerhalb eines axiomatisch-deduktiven Systems.

Geht man unabhängig von jeglicher Sinnesintuition vor, so kann man keine euklidischen Formen der Geometrie schaffen. Der Realitätscharakter hängt davon ab, welche Definition - ontologisch oder nicht - man dem Begriff der Realität geben will.