

## 5. Fijne stof in een gesloten opstelling met ongelijke lichtweg.

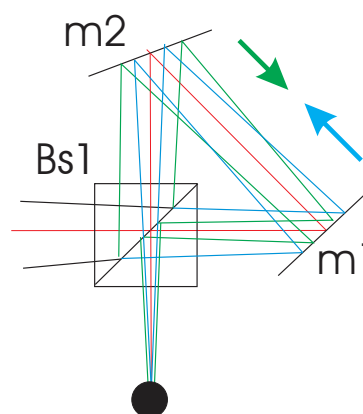
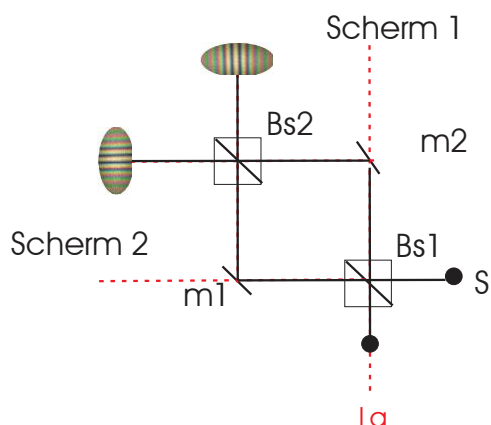
### Inhoud

5.1. Een ‘open’ of een ‘gesloten’ opstelling. ....	1
5.2. De basisopstelling.....	2
5.3. Aan de slag .....	4
5.4. Hoe dit interpreteren?.....	7
5.5. De wiskundige uitwerking .....	9
5.6. De algebraïsche uitwerking.....	11

In wat volgt willen we effectief een soort van interferometer te bouwen. We willen nagaan of er zich een interferentiebeeld toont en wat we zullen zien als we de hand in de lichtweg te brengen.

### 5.1. Een ‘open’ of een ‘gesloten’ opstelling.

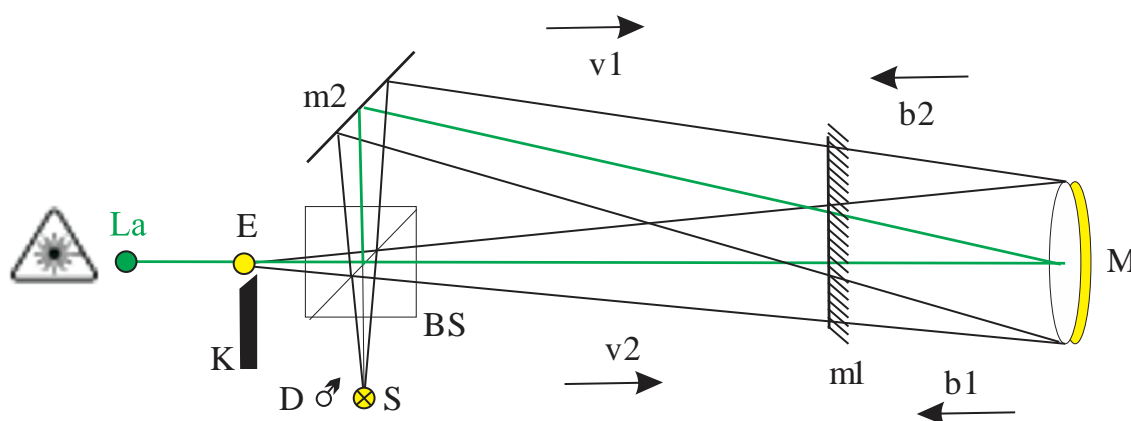
In wat vooraf ging spraken we van een ‘open’ en een ‘gesloten’ opstelling. De tekening links toont een open opstelling. De beide lichtwegen – S, Bs1, m1, Bs2 en S, Bs1, m2, Bs2 – volgen elk een verschillende weg. Het is niet eenvoudig om de beide lichtwegen tot op een onderdeel van een mm even lang te maken. Dat probleem stelde zich niet in de opstelling waarvan we rechts een detail zien. Of het licht nu de opstelling in wijzerzin of in tegenwijzerzin doorloopt, dat maakt geen verschil. We spreken daarom van een gesloten opstelling.



In de opstelling hieronder zien we twee onderscheiden lichtwegen. Een eerste bundel doorloopt de opstelling in wijzerzin, een tweede doet zulks in tegenwijzerzin.

## 5.2. De basisopstelling

De deelbundel in wijzerzin gaat divergerend van S, de beamsplitter Bs en m2, naar de spiegel M. Noemen we die weg de voorwerpsafstand  $v_1$ . Vervolgens gaat het licht convergerend naar Bs en E. Noemen we die weg de beeldafstand  $b_1$ .

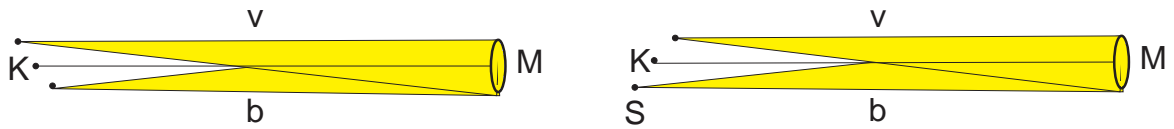


De deelbundel in tegenwijzerzin doorloopt de opstelling divergerend van S en Bs naar de spiegel M. Deze weg is de voorwerpsafstand  $v_2$ . Vervolgens gaat het licht convergerend naar m2, Bs en E. Noemen we die weg de beeldafstand  $b_2$ .

Men herkent in de vorm van de opstelling een driehoek met als rechthoekszijde Bs-m2, als schuine zijde m2- M, en als andere rechthoekszijde M-Bs. Het is dus geen 'open' opstelling. Ze is 'gesloten', De lichtweg in wijzerzin is even lang als in tegenwijzerzin. Toch is er een eigenaardigheid : de lichtweg naar de spiegel via m2 is langer dan de lichtweg die rechtstreeks van Bs naar de spiegel M gaat. Noemen we het een 'gesloten' opstelling met een ongelijke lichtweg van de beide deelbundels naar de spiegel M. Dit heeft zijn belang. We komen hier later nog op terug bij de bespreking van de eveneens 'gesloten' opstelling maar met een gelijke lichtweg.

Er is in deze opstelling enerzijds een soort van omgekeerde evenredigheid tussen de voorwerpsafstand en de beeldafstand die uitgedrukt wordt in de spiegelformule  $1/f = 1/v + 1/b$ .

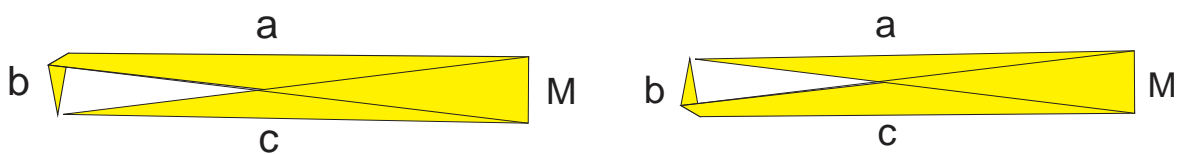
Is de voorwerpsafstand lang, dan is de beeldafstand kort, en omgekeerd, is de voorwerpsafstand kort, dan is de beeldafstand lang.



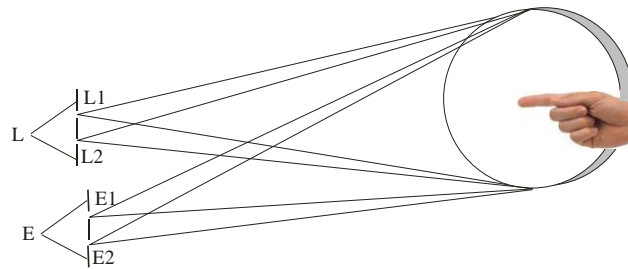
Op een manier kan men zeggen dat die omgekeerde evenredigheid ook speelt in een driehoek : in de tekening links hieronder is de som der zijden  $a + b$  groter dan de zijde  $c$ , en in de tekening rechts hieronder is de som der zijden  $b + c$  groter dan de zijde  $a$



Hetzelfde als hierboven geldt voor de beide tekeningen hieronder. Maar hierin ziet men eveneens de analogie met de tekening hogerop die de voorwerps-en beeldafstand weergeeft, maar waarbij de langste afstand een ‘knik’ kreeg zodat we in de twee figuren telkens de driehoek herkennen. Wiskundig komt het erop neer dat men voorwerps- en beeldafstand zo kiest dat ze netjes in de driehoek passen zodat hun convergentiepunten perfect in een hoekpunt samenkomen. Dat zulks niet zo eenvoudig is mag blijken uit de algebraïsche bewerking die hiervoor is vereist en die we op het einde van deze tekst weergeven.

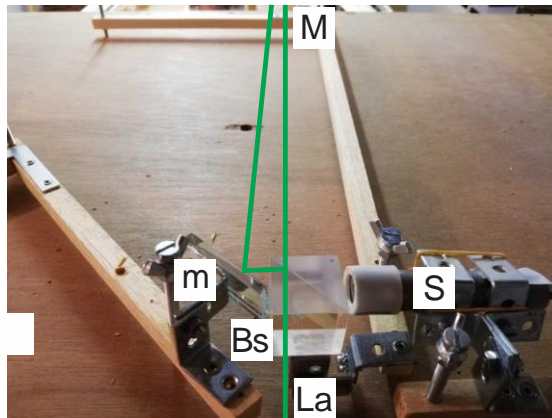


We kunnen ons de basisopstelling ook voorstellen als een lichtbron die ontdubbeld wordt in twee deelbundels, een beetje analoog als het tweespleten-experiment van Young. Na weerkaatsing op de spiegel verenigen de deelbundels zich opnieuw, maar nu via een beamsplitter. In onze opstelling vallen bovendien de lichtbron L en de plaats van de waarnemer E, bij wijze van spreken samen.



### 5.3. Aan de slag

We bouwen de opstelling effectief op de optische bank en plaatsen het vlakke spiegeltje  $m_2$  op een kleine afstand van de beamsplitter  $B_s$ . Twee coherente, d.i. van dezelfde lichtbron afkomstige, bundels leggen een onderscheiden weg af en verenigen zich nadien met elkaar in  $E$ .

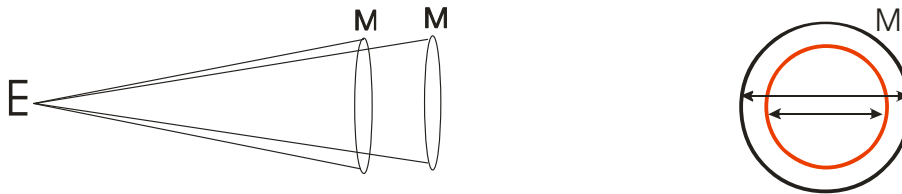


De vlakke spiegel  $m_1$  komt halverwege de lichtweg en herinnert er ons aan dat de spiegel  $M_1$  in werkelijkheid net onder de waarnemer in  $E$  staat, zodat deze de eigen hand kan bekijken. De tekening is dus helemaal niet op schaal. In werkelijkheid is de doormeter van  $m_1$  hier gelijk aan 100 mm zodat hij op die plaats nog alle deelbundels kan bevatten. De spiegel  $M$  staat op ongeveer 2500 mm van  $E$ , het schuine spiegeltje  $m_2$  bevindt zich enkele mm verwijderd van  $B_s$ . Er is dus een parallax maar deze is te klein om het beeld zichtbaar te beïnvloeden.

We zien dat in onze opstelling de lichtweg  $v_1$  langer is dan de lichtweg  $v_2$ , en de lichtweg  $b_1$  korter dan de lichtweg  $b_2$ . We noemen deze opstelling, die enigszins een driehoek vormt, daarom ‘de basisopstelling met ongelijke lichtweg’.

Het licht van  $M$  dat ons via  $b_2$  bereikt, heeft dus een langere weg afgelegd dan het licht dat vanuit  $M$  ons via  $b_1$  bereikt. Zodat vanuit het standpunt van het oog in  $E$ , de spiegel  $M$  in het

eerste geval verder staat dan in het tweede geval. Dat illustreert ons tekening hieronder links op een overdreven wijze. Het oog ziet dus twee cirkeloppervlakken die in grootte iets verschillen.



Zij de afstand van  $B_s$  naar  $m_2$ , b.v. 10 mm, dan is  $b_1$  bij benadering 2495 mm en  $b_2$  bij benadering 2505 mm. Rekenen we het na dan blijkt het ene beeld van de spiegel dan vanuit E ongeveer 0.6 mm in grootte te verschillen t.o.v. het andere beeld van dezelfde spiegel. Dat toont ons, sterk overdreven, de tekening rechts.

Bij het effectief bouwen van deze opstelling zal blijken dat dit verschil te klein is om op een 2500 mm afstand door het oog nog te worden waargenomen, maar groot genoeg om een interferentiebeeld te veroorzaken. Daarom is het juist een radiale interferometer : beide beelden hebben een verschillende doormeter.

Omdat het een interferentie van wit licht betreft, kunnen we ons aan kleuren verwachten. Herinneren we eraan dat onze ‘puntlichtbron’ voorzien is van een regelbare dimmer D. We werken met maximale lichtsterkte. We lijnen de opstelling met de laser nauwkeurig uit. We hebben ondervonden dat het bekomen van interferentie-beelden niet eenvoudig is, ja dat deze opstellingen een haast draconische nauwkeurigheid vereisen. Lichtgolven zijn nu éénmaal bijzonder klein, er gaan tweeduizend golven in één enkele mm. Met getemperde verwachtingen en toch hoopvolle verwachtingen kijken we voor de eerste keer naar onze spiegel. Wat we dan te zien kregen, overtrof onze stoutste verwachtingen.

In de eerste tekening, getrouwe weergaven van wat zich toont, zien we dat de afstelling nog niet maximaal is. De beelden van de lichtweg vallen nog niet perfect samen. Stellen we met de stelschroeven fijner af, dan verbreden de lijnen zich meer en meer zoals de tekening in het midden dat weergeeft. De afbeelding rechts is een foto, genomen met een GSM.



Deze lijnen worden breder naarmate het kleine spiegelje m2 dichterbij Bs komt. We letten erop dat m2 de splitter Bs niet raakt. Dit laatste om krassen op de spitter te vermijden. We stellen opnieuw nauwgezet af en zien wat er zich links op de foto toont. Het lijkt alsof één enkele lijn veel breder is opengetrokken. Stellen we met behulp van de vele stelschroeven nauwkeuriger af, dan zien we op de foto rechts geen lijnen meer maar een centrale zwarte cirkel, omgeven door een gele. Het is even wennen en ons afvragen wat we nu juist zien en hoe we dat verder moeten interpreteren.



Terloops : de vele stelschroeven, M6, zijn conisch uitgeboord en onderaan voorzien van een kogeltje om de wrijving te minimaliseren.



#### 5.4. Hoe dit interpreteren?

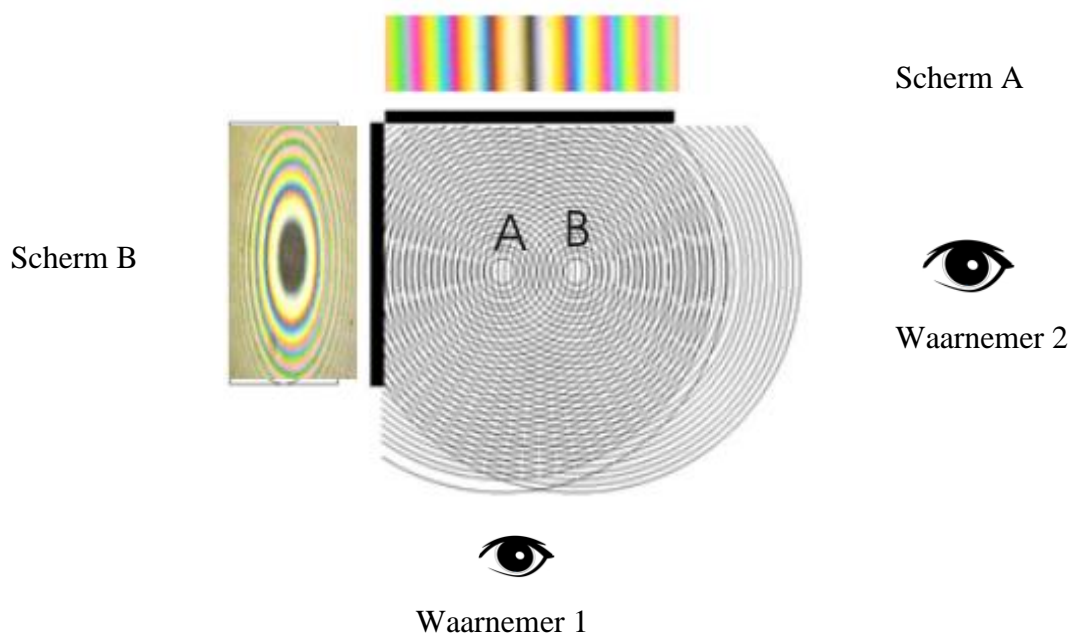
Wie thuis is in optica zal bij de eerste foto, vrijwel onmiddellijk aan de twee-spletenproef van Young denken. De tweede afbeelding, een tekening, lijkt verband te houden met de gekende ringen van Newton. We hebben beide verschijnselen reeds toegelicht in de tekst onder punt 5.7.

In de tekening hieronder willen we het verband tussen het twee-spletenexperiment van Young en de ringen van Newton toelichten.

Kijken we naar de tekening hieronder, dan zien we dat zowat de twee zijden zijn van eenzelfde interferentiegebeuren. Twee lichtpunten, dicht bij elkaar, genereren voortdurend uitdijende bollen. In een plat vlak voorgesteld zijn ze hier uiteraard weergegeven als cirkels.

Vanuit het gezichtspunt van waarnemer 1 liggen de punten A en B naast elkaar en genereren op het scherm A een reeks evenwijdige lijnen. Vanuit het standpunt van waarnemer twee liggen de punten A en B achter elkaar en genereren op het scherm B een aantal cirkels, de zogenaamde ringen van Newton. Newton ontdekte ze, maar kon ze niet verklaren omdat hij licht niet als golven, maar als kleine deeltjes beschouwde.

Zo we de twee punten A en B niet naast of onder elkaar leggen, maar wat meer diagonaal, dan zouden er zich op een scherm, gelegen tussen de schermen A en B, geen rechten of cirkels, maar krommen vertonen, en dit juist als overgang tussen cirkels en rechten. De Engelsman Young en de Fransman Fresnel waren het in hun tijd niet eens of dit interferentieverschijnselen nu rechten of krommen betrof. Zij keken blijkbaar niet vanuit hetzelfde gezichtspunt.



We doen de foucaulttest met het mes opnieuw om de lichtbron S zo nauwkeurig mogelijk in het krommingspunt te brengen. Dan verwijderen we het mes en kijken met voldoende lichtsterkte. We merken dat onze spiegel over zijn hele oppervlakte verlicht is met slechts enkele interferentiekleuren. Dat toont ons de foto links hieronder. Nauwkeuriger afstellen leidt tot beelden waarbij het spiegeloppervlak gevuld is met slechts één enkele kleur.



Brengen we de hand in de lichtweg, dan zien we dat hieruit een aantal gekleurde slierten opstijgen. De hand is warmer dan de lucht rondom en verwarmt deze nabije luchtlagen. Hierdoor verandert de brekingsindex van de lucht op die plaats en dat geeft aanleiding tot het ontstaan van deze slierten. Dat zien we ook op de foto hier onder links.

Verduisteren we de opstelling maximaal, dan zien we geen slierten meer, maar toont zich opnieuw de flauwe, nevelige en lichtende strook rondom de hand, zoals we die ook al vaststelden bij de ‘donkerversie’ van de foucaulttest. Dat zien we op de foto hieronder rechts.





### 5.5. De wiskundige uitwerking

In wat volgt gaan we de wiskundige toer op. Zonder berekeningen gaat het nu eenmaal niet. Met wiskunde krijgen we greep op de opstelling en kunnen we vooraf nagaan, ja berekenen, hoe een verschijnsel zich maximaal of minimaal zal tonen. We krijgen bij manier van spreken een greep en ook macht over onze opstelling. Wie weet wat hij zoekt, weet ook wat hij vindt. In het andere geval werkt men in het ijle, zoekt men wel eens tevergeefs en begrijpt men ook niet steeds wat men vindt. Houden we het bij de uitspraak van Kurt Lewin uit 1947 : “Niets is praktischer dan een goede theorie”. Verduidelijken met een aantal gegevens de tekening hieronder.

S = Source, puntlichtbron, wit licht.

M = Mirror, (hoofdletter) concave spiegel, 155 mm doormeter,  $f = +/- 1250$  mm

m = mirror, (kleine letter) kleine vlakke spiegel, met spiegelende laag aan bovenzijde

BS = beamsplitter cube voor visueel licht, 50/50, 20 mm<sup>3</sup>.

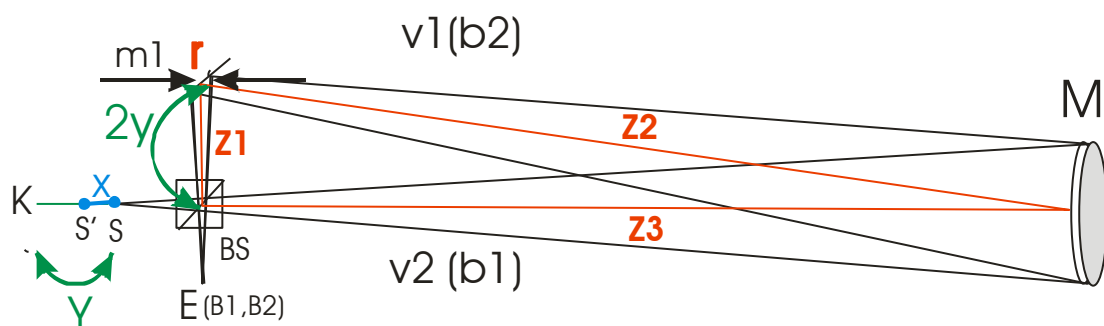
E = Eye, oog, plaats van de waarnemer

v = (kleine letter) voorwerpsafstand

b = (kleine letter) beeldafstand

B = (hoofdletter) beeldpunt

K (hoofdletter) = krommingsmiddelpunt



Letten we op de rode driehoek, gevormd door het midden van BS, m1, M en opnieuw met het midden van BS. Het is een rechthoekige driehoek, met de rechte hoek in BS. Z1 en Z3 zijn de rechthoekszijden, Z2 is de schuine zijde en is uiteraard langer dan Z3.

De afstand  $2y$ , aangegeven met de groene boog links, is de som van de zijde  $z_1$ , plus het verschil van  $z_2$  en  $z_3$ . Kortere;  $2y = z_1 - (z_2 - z_3)$ .

De afstand van het krommingsmiddelpunt  $K$  tot  $S$  (de groene boog onderaan) is gelijk aan één keer  $y$ .

Tenslotte,  $x$  (in blauwe kleur), de afstand van  $S'$  tot  $S$ , wordt gegeven met de formule :

$$x = \text{sqr}(y^2 + f^2) - f$$

Trachten we, met al deze gegevens, de voorwerpsafstanden te definiëren. We krijgen:

$$v_1 = 2*f - y + 2y + x \quad \text{of} \quad v_1 = 2*f + y + x$$

$$v_2 = 2*f - y + x$$

via de spiegel formule  $1/f = 1/v + 1/b$  vinden we :

$$b_1 = v_1*f / v_1 - f \quad b_2 = v_2*f / v_2 - f$$

Illustreer we met de volgende waarden:

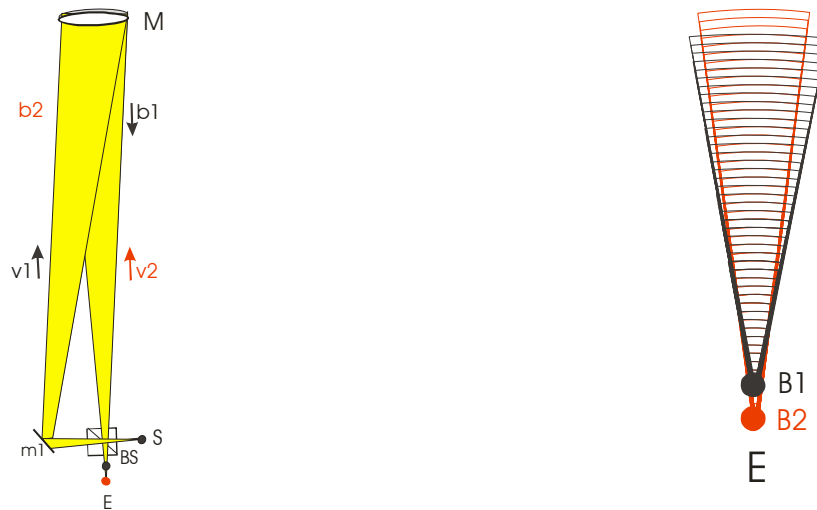
$f = 1250$ ,  $y = 5$ ,  $x = \text{sqr}(5^2 + 1250^2) - 1250$  of  $0.01$ . We krijgen:

$$v_1 = 2500 + 5 + 0.01 \text{ of } 2505.01, \quad b_1 = 2505.01 * 1250 / 2505.01 - 1250 \text{ of } 2495.01$$

$$v_2 = 2500 - 5 + 0.01 \text{ of } 2495.01, \quad b_2 = 2495.01 * 1250 / 2495.01 - 1250 \text{ of } 2505.01$$

We zien dat met deze waarden  $v_1 = b_2$ , en ook dat  $v_2 = b_1$ . Het belang hiervan wordt onmiddellijk duidelijk als we ons realiseren dat  $v_2 - b_1 = 0$ , maar ook  $v_1 - b_2 = 0$ . Dit betekent dat theoretisch de beeldpunten  $B_1$  en  $B_2$  voor de waarnemer in  $E$ , exact samenvallen. Het is de situatie zoals ze werd toegelicht in tekening 10c.

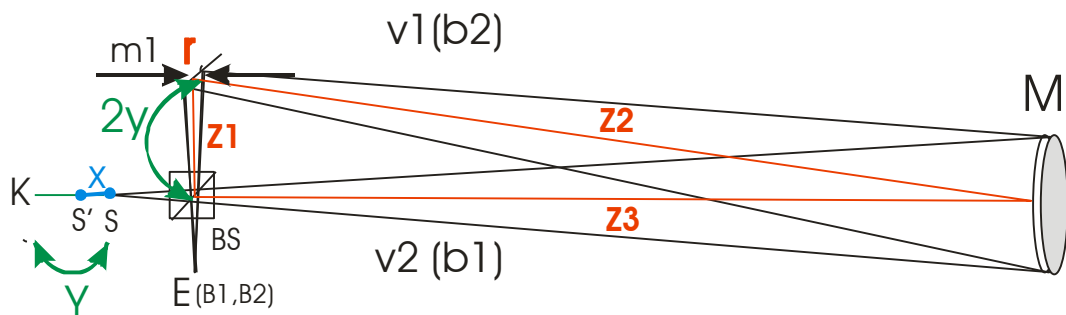
Doen we de berekening voor een andere waarde over, b.v.  $y = 10$ , en houden we ons aan de formule  $x = \text{sqr}(y^2 + f^2) - f$ , dan vinden we steeds dat  $B_1$  en  $B_2$  samenvallen. M.a.w. onze opstelling laat ons toe twee coherente lichtpunten theoretisch exact te laten samenvallen.



De tekening hierboven links illustreert de weg van het licht in de basisopstelling (een gesloten opstelling met ongelijke lichtweg). De tekening rechts geeft een detail van de lichtweg in de buurt van E. De convergerende deelbundels b1 en B1 vallen hier nog net niet samen. Kijken we in de spiegel dan zullen we nog lijnen of cirkels zien. Vallen ze wel samen, dan zijn lijnen of cirkels zo breed dat ze buiten het oppervlak van de spiegel vallen.

### 5.6. De algebraïsche uitwerking

Na de wiskundige praktijk nu de wiskundige theorie. Dit vijfde hoofdstukje willen we afronden met de theoretische toelichting die leidt tot het vinden van de formule :  $x = \sqrt{y^2 + f^2} - f$ . Nemen we hiervoor opnieuw de vorige tekening.



Denken we de puntlichtbron in S' en trachten we de beide voorwerpsafstanden algebraïsch te definiëren. Kijken we naar de afbeelding hierboven.

We krijgen:

v1, de voorwerpsafstand in wijzerzin, is gelijk aan de afstand van S' naar S, dan naar de beamsplitter B, vervolgens naar de kleine spiegel m1 en tenslotte naar de holle spiegel M, of:

$$v1 = 2*f - (m - r) + 2*m = 2*f + m + r. \quad (1)$$

$v_2$ , de voorwerpsafstand in tegenwijzerzin, is gelijk aan de afstand van  $S'$  naar  $S$  en verder via  $B$  tot  $M$  of:

$$v_2 = 2*f - (m - r) = 2*f - m + r \quad (2)$$

Via de spiegelformule  $1/f = 1/b + 1/v$  vinden we:  $b = (v*f) / (v-f)$ , zodat  $b_1$ , de eerste beeldafstand, behorend bij  $v_1$ , en die van  $M$  via  $B$  in de richting van  $E$  gaat, gelijk is aan

$$b_1 = (2*f - m + r)*f / (2*f - m - r - f) \quad (3)$$

Voor  $b_2$ , de tweede beeldafstand, behorend bij  $v_2$ , en die van  $M$  via  $m_1$  en  $B$  in de richting van  $E$  gaat vinden we:

$$b_2 = (2*f + m + r)*f / (2*f + m + r - f) \quad (4)$$

Zien we vervolgens op de afbeelding waar  $b_1$  zich situeert, dan merken we dat de beschikbare weg voor  $b_1$  gelijk is aan  $v_2$ . Het beeldpunt  $B_1$  (de hoofdletter ter onderscheiding van de kleine letter  $b_1$ , de beeldafstand) zal dus op  $b_1 - v_2$  van  $E$  verwijderd liggen, of:

$$B_1 = b_1 - v_2$$

Zien we geheel analoog waar  $b_2$  zich situeert, dan stellen we vast dat de beschikbare weg gelijk is aan  $v_1$ . Het punt  $B_2$  zal dus op  $b_2 - v_1$  van  $E$  verwijderd liggen.

$$B_2 = b_2 - v_1$$

De onderlinge afstand  $D$  tussen de beide beeldpunten  $B_1$  en  $B_2$  vinden we door het verschil tussen deze beide laatste waarden te maken. We krijgen:

$$D = B_2 - B_1 = (b_2 - v_1) - (b_1 - v_2) = (b_2 - b_1) - (v_1 - v_2) \quad (5)$$

Uit (1) en (2) vinden we:

$$(v_1 - v_2) = 2*f - m + r - 2*f - m - r = -2*m \quad (6)$$

zodat we (5) kunnen herschrijven als:

$$D = (b_2 - b_1) + 2*m \quad (7)$$

Vervangen we nu in (7) voor  $b_2$  en  $b_1$  de waarden bekomen in (3) en (4):

$$D = ((2*f - m + r)*f / (f - m + r)) - ((2*f + m + r)*f / (f + m + r)) + 2*m$$

Werken we deze vergelijking nu verder uit.

$$\begin{aligned}
&= (((2f^2 - fm + fr) * (f + m + r) - (2f^2 + fm + fr) * (f - m + r)) / ((f - m + r) * (f + m + r))) + 2m \\
&= (2f^3 + 2f^2m + 2f^2r - f^2m - fm^2 - fmr + f^2r + fmr + fr^2) / ((f + m + r) * (f - m + r)) - \\
&\quad (2f^3 - 2f^2m + 2f^2r + f^2m - fm^2 + fmr - f^2r - fmr + fr^2) / ((f + m + r) * (f - m - r)) - 2m \\
&= (2f^2m / ((f + m + r) * (f - m - r))) - 2m \\
&= (2f^2m / (f^2 - fm + fr + fm - m^2 + mr + fr - mr + r^2)) - 2m \\
&= (2f^2m / (f^2 + 2fr + r^2 - m^2)) - 2m \text{ of :} \\
D &= (2f^2m / ((f+r)^2 - m^2)) - 2m \tag{8}
\end{aligned}$$

Met deze laatste uitdrukking hebben we nu een formule die ons zegt op welke afstand de beide beeldpunten B1 en B2 van elkaar verwijderd liggen in onze opstelling, en dit in functie van de brandpuntsafstand  $f$  van onze spiegel  $M$ , van de waarde voor  $m$  en van de radiale verschuiving  $r$  van onze puntlichtbron.

Laten we in deze uitdrukking  $r$  naar 0 streven, en werken we verder uit dan verkrijgen we:  $D = (2f^2m / (f^2 - m^2)) - 2m$

$$\begin{aligned}
D &= (2f^2m - 2m(f^2 - m^2)) / (f^2 - m^2) \\
D &= (2f^2m - 2mf^2 + 2m^3) / (f^2 - m^2) \\
D &= 2m^3 / (f^2 - m^2)
\end{aligned}$$

We zien zo dat de waarde van  $D$  kleiner wordt naarmate de waarde van  $m$  verkleint en /of de waarde van  $f$  vergroot. Willen we bij  $r = 0$ , de beeldpunten B1 en B2 dichter bij elkaar brengen zullen we dus de voorwerpsafstanden  $v_1$  en  $v_2$  zoveel mogelijk aan elkaar moeten gelijk maken en/of werken met spiegels met lange brandpunten.

Het ligt nu voor de hand ons af te vragen wanneer de beide beeldpunten echt samenvallen, of wanneer de waarde voor  $D$  gelijk wordt aan 0. We zullen dit berekenen in functie van de afstand  $r$ , omdat deze waarde in een opstelling het gemakkelijkst kan gewijzigd worden, door de lichtbron voor- of achteruit te verplaatsen. Werken we dit uit, vertrekkend van de vergelijking gegeven onder (8), dan vinden we:

$$D = (2f^2m / ((f+r)^2 - m^2)) - 2m, \text{ of: } (2f^2m / ((f+r)^2 - m^2)) - 2m = 0$$

en werken we verder uit:

$$\begin{aligned}
2f^2m / ((f+r)^2 - m^2) &= 2m, \text{ of} \\
(f+r)^2 - m^2 &= 2f^2m / 2m \\
(f+r)^2 &= f^2 + m^2 \\
f + r &= \text{sqr}(m^2 + f^2), \text{ of} \\
\mathbf{r} &= (\mathbf{sqr}(m^2 + f^2)) - \mathbf{f} \tag{9}
\end{aligned}$$

Met deze laatste formule hebben we het gevraagde; een nul-waarde voor  $D$  in functie van  $r$ . Indien dus  $r$  aan de hierboven beschreven voorwaarde voldoet dan moeten de beide beeldpunten  $B_1$  en  $B_2$  praktisch samenvallen.